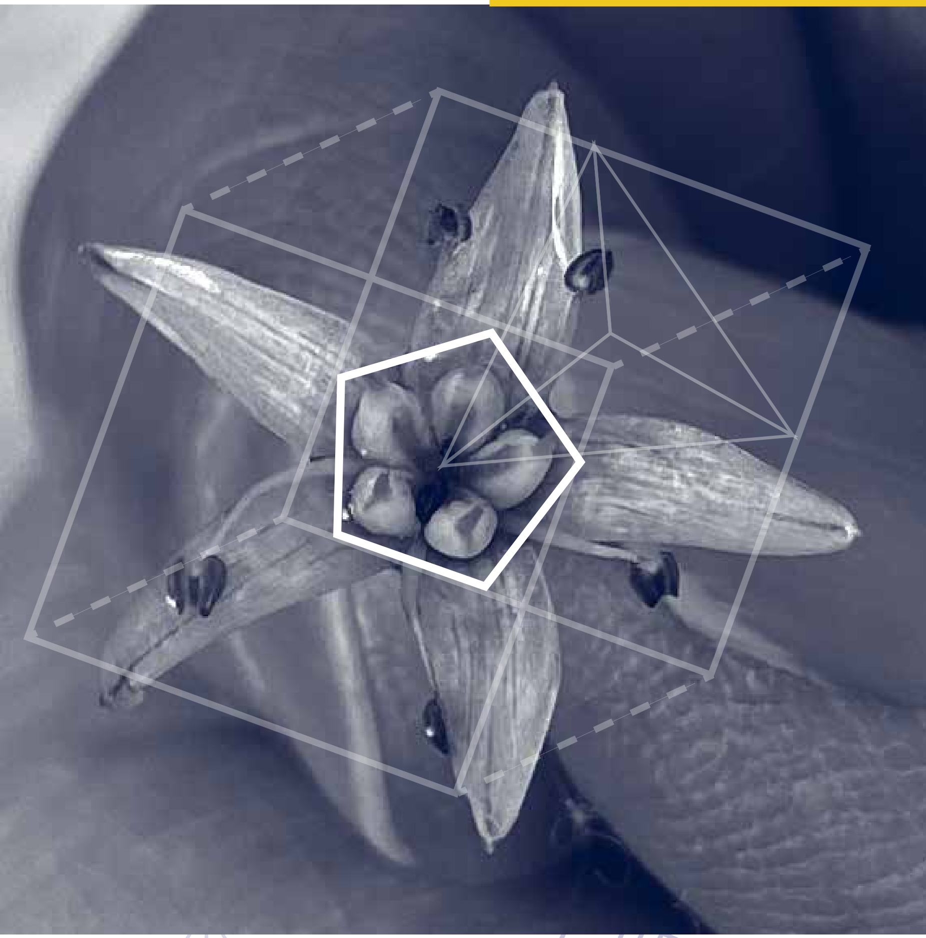
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

JUAN DE DIOS HERNÁNDEZ GARZA



Habilidades **matemáticas** en el nivel medio

Horizontes Educativos

Horizontes Educativos

Habilidades matemáticas en el nivel medio está dirigido a los docentes de matemáticas en secundaria y bachillerato, a quienes se les invita a apropiarse de procedimientos alternativos para fomentar en sus alumnos el desarrollo de capacidades relacionadas con los contenidos matemáticos en ese nivel.

Se presentan sugerencias y una gran variedad de ejemplos para cambiar los enfoques estandarizados en la enseñanza de la matemática y potenciar la adquisición de capacidades cognoscitivas en los alumnos, que les permitan lograr una mayor comprensión de esta asignatura.

El autor sugiere a los profesores promover la resolución creativa de problemas matemáticos no estandarizados (no rutinarios) y acompañar a los estudiantes en la búsqueda de procedimientos diversos de solución (enfoque flexible), así como la resolución de problemas inversos (del resultado a los datos iniciales) y el hallazgo de fórmulas generales a partir del análisis de casos particulares (pensamiento inductivo).

Se evoca el valor indispensable del acompañamiento docente-alumno para mejorar la comprensión en educación matemática, propiciando el desarrollo de un pensamiento creativo como contraparte del pensamiento rígido y la fijación de procedimientos no eficaces en la solución de problemas que requieren razonamientos flexibles y reversibles.

Horizontes Educativos

Habilidades matemáticas en el nivel medio

Juan de Dios Hernández Garza

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Habilidades matemáticas en el nivel medio
Juan de Dios Hernández Garza

Primera edición, 18 de noviembre de 2021

www.upn.mx
Esta obra fue dictaminada por pares académicos.
ISBN 978-607-413-432-2

QA11 H4.4
Hernández Garza, Juan de Dios
Habilidades matemáticas en el nivel medio / Juan de Dios Hernández Garza.-- Ciudad de México : UPN, 2021.
1 archivo electrónico (97 p.) ; 950 Kb ; archivo PDF : il., tablas. -- (Horizontes educativos)
ISBN 978-607-413-432-2

1. APTITUD MATEMÁTICA
2. MATEMÁTICAS - ESTUDIO Y ENSEÑANZA (MEDIA SUPERIOR) I.t. II. Serie

Hecho en México.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se pretende despertar el interés de los docentes de matemáticas en el nivel medio con un doble propósito, por una parte, conocer algunos planteamientos teóricos sobre las habilidades matemáticas, la flexibilidad de pensamiento, la reversibilidad de pensamiento y la generalización; y, por otra, tener acercamientos concretos a estas habilidades para intentar su desarrollo en el aula.

Se presentan ejemplos de problemas no rutinarios, no abordados directamente en los contenidos temáticos o que no se pueden resolver con los procedimientos estandarizados ni se consideran como material de estudio en los libros de texto.

También se proporcionan ideas para convertir algunos problemas rutinarios –como la solución de ecuaciones, resueltas comúnmente con procedimientos estandarizados– en problemas para los cuales es necesario implementar un procedimiento no estandarizado o implementar una solución alternativa.

Con respecto a las soluciones alternativas, estas se pueden entender como procedimientos no usuales en clase en los que los algoritmos comunes no son suficientes para llegar a la solución de un problema.

Una reflexión importante es que la mínima posibilidad de desarrollo de estas habilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, representa una invitación a los docentes para esforzarnos por promoverlas.

Si el objetivo es la promoción eficaz de la labor del docente, acorde con los enfoques y métodos de enseñanza centrados en el desarrollo de habilidades intelectuales, es necesario hacer una mayor difusión interpretativa sobre la metodología sugerida, incluidos ejemplos de secuencias didácticas y estrategias de enseñanza y aprendizaje para ilustrar su empleo en el aula. Todo esto para consensuar lo que se entiende por habilidades matemáticas, concepto que en ocasiones puede confundirse con la solución de ejercicios o la solución rutinaria de problemas.

Esto puede deberse a la falta de claridad por parte de los docentes acerca del significado de habilidad, por ejemplo, se puede privilegiar la cantidad de ejercicios típicos o rutinarios al utilizar problemas analógicos y olvidar la reflexión sobre los métodos de solución de problemas con estructuras semejantes. Otra razón pudiera ser el desconocimiento por parte de los profesores de modelos didácticos específicos para fomentar estas capacidades. Una situación muy común se presenta cuando el docente indica que ha terminado un tema de estudio o contenido educativo, y detalla los contenidos específicos de dicho tema o habla acerca de la falta de conocimientos de los estudiantes, pero deja de lado las habilidades o destrezas desarrolladas con tales contenidos.

Como mencionan Balbuena *et al.*, si avanzamos en el convencimiento de los docentes,

> ... que la mejor manera de aprender Matemáticas es a través de la resolución de problemas posibilitando el desarrollo y evolución de recursos propios, daremos un paso muy importante en el sentido de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje que se realiza con los alumnos (Balbuena *et al.*, 1994, Presentación, párr. 6).

CAPÍTULO I

PROPUESTA ALTERNATIVA A LA ENSEÑANZA TRADICIONAL

Dentro de los enfoques innovadores en la enseñanza de la matemática, se ha planteado como objetivos prioritarios aquellos referidos al desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la capacidad de resolver problemas no rutinarios. La idea central en estos planteamientos consiste en dar más importancia a las estrategias de enseñanza y de aprendizaje para tratar de mejorar el desempeño intelectual de los estudiantes, en vez de almacenar información que luego estos reproducen mecánicamente en situaciones análogas (Hernández y Sánchez, 2016).

Bajo esta perspectiva, el docente debe cambiar el enfoque tradicional, el cual genera serias dificultades en los alumnos cuando se les enfrenta a situaciones no rutinarias dentro o fuera del contexto escolar, porque no se les ha enseñado a abordar problemas no rutinarios para favorecer en ellos la adquisición de los aprendizajes esperados, poner en acción sus potencialidades y adquirir nuevos saberes por iniciativa personal.

En este cambio de enfoque también se deben considerar las creencias de los estudiantes con respecto a la matemática, de modo que traten de modificarlas; por ejemplo, al llegar a una situación en la que los conceptos o procedimientos del tema de estudio ya no les permitan acceder a una solución "rápida", que tengan la intención de buscar alternativas de solución o ideas relacionadas con el problema a resolver.

Schoenfeld (2012) menciona la relación que existe entre el uso excesivo de problemas rutinarios y las creencias del alumno acerca de las matemáticas. Algunas de estas creencias son:

- Los problemas tienen una sola respuesta.
- Existe una única manera para resolver cualquier ejercicio: la que expone el profesor en clase, que los estudiantes comunes no entenderán y, por ello, solo pueden memorizarla y aplicarla mecánicamente.
- Es una actividad realizada por individuos aislados, en la que no hay trabajo de grupo.
- Los alumnos que la "dominan" resuelven cualquier ejercicio en cinco minutos o menos.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real.

Gal y Ginsburg mencionan:

> ... para ejercicios rutinarios y problemas de práctica, este sistema de creencias permite el éxito y la comodidad. Sin embargo, si una regla o procedimiento no funciona, entonces el aprendiz se encuentra en un punto muerto, no existe un mecanismo para modificar, o desarrollar reglas o procedimientos (Gal y Ginsburg, 1994, p. 14).

Por otro lado, algunos individuos creen que la matemática es "relacional"; es decir, el conocimiento matemático es una red interconectada y significativa. Estas personas no tienen miedo de entrar en su "red matemática" y tratar de derivar o desarrollar una solución adecuada.

Con respecto a los problemas no rutinarios, Flores y Gómez escriben:

> ... se pueden resolver de manera no usual, poniendo en práctica habilidades de resolución de problemas y de razonamiento, y se salen del tipo de problemas en donde se aplican algoritmos de manera más o menos mecánica (Flores y Gómez, 2009, p. 127).

Así mismo, hacen referencia al siguiente ejemplo de problema no rutinario propuesto por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM):

> En dónde hay que colocar una parada de autobús que dará servicio a los habitantes de 13 casas situadas a lo largo de una carretera. La distancia total de la parada a las casas debe ser la mínima (NCTM, 1991, p. 127).

En la solución de este problema pueden explorarse algunas ideas:

a) Debe haber casas tanto a la izquierda como a la derecha de la parada.
b) Proponer un concepto referente a la parada del autobús.
c) Sugerir una idea para la medición de la distancia de la parada a cada una de las casas a lo largo de la carretera (considerando la suma de las distancias como mínima).

Mediante tareas o problemas no rutinarios es posible hacer exploraciones, contar con situaciones de validación de conjeturas y fomentar un pensamiento matemático y habilidades de resolución de problemas.

Doyle menciona los requerimientos de las nuevas tareas en matemáticas:

> ... los estudiantes deben reunir información y operaciones de varias fuentes no establecidas de manera explícita por el maestro. Esto implicaría procesos como decidir, qué operación se ajusta a un problema en particular, o combinar algoritmos ya aprendidos en una cadena de operaciones para resolver un problema. Como característica esencial los estudiantes deben tomar decisiones sobre qué producir y cómo producirlo (Doyle, 1988, p. 173).

Schoenfeld (s.f.) propone dos ejemplos de tareas relativos a la enseñanza de contenidos (situaciones rutinarias) y al desarrollo de habilidades cognoscitivas.

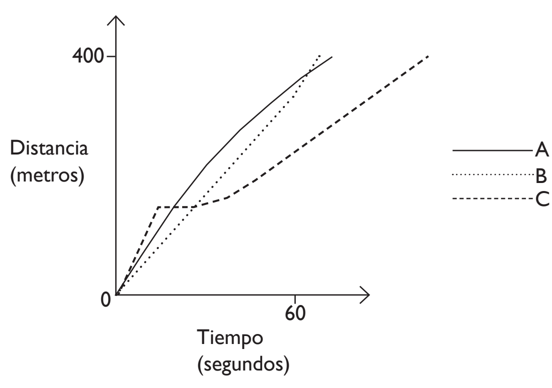
1. Enseñanza de contenidos:

¿Cuál es la intersección con el eje ***y*** de la gráfica de $4x + 2y = 12$?
(A) – 4, (B) – 2, (C) 6, (D) 12.

2. Desarrollo de habilidades cognoscitivas:

En contraste con la enseñanza de contenidos, Schoenfeld (s.f.) plantea otra situación: tres atletas, A, B y C, participan en una carrera de obstáculos. Imagina que eres el comentarista de la competencia: describe qué está sucediendo con todo el cuidado del que seas capaz; no necesitas medir nada de manera precisa.

Figura 1.1. Gráfica: distancia-tiempo



Esta actividad requiere la interpretación de gráficas distancia-tiempo en un contexto real, lo que es un componente central de la modelación matemática. Una respuesta completa incluiría lo siguiente:

- Entender que a un corredor cuya gráfica aparece "a la izquierda" de otro en ese punto le tomó menos tiempo recorrer la misma distancia (por lo tanto, B gana la carrera);
- comprender qué significan en este contexto los puntos de intersección (si dos corredores han recorrido la misma distancia al mismo tiempo están empatados en ese punto de la carrera);
- interpretar el segmento de recta horizontal (el corredor no está avanzando, así, en el contexto de la carrera debió haber tropezado con una valla y cayó); y
- poner todo lo anterior en una narrativa coherente.

Los argumentos anteriores sugieren la necesidad de cambiar el enfoque tradicional para transformar los problemas con procedimientos conocidos o sugeridos por el tema de estudio en problemas para los que es necesario utilizar procedimientos no vistos directamente en clase o no tratados en los libros de texto. Para lograr esta transformación, se requiere de dar nuevos significados a los conocimientos previos de los alumnos.

Tammadge

> ... señala la urgente necesidad de los maestros de matemáticas para identificar, fomentar y mejorar la habilidad creativa en todos los niveles. Su argumento es: la enseñanza de la matemática ha estado dominada largo tiempo por un pensamiento racional y un modelo de aprendizaje memorístico, enfatizando el aprendizaje acumulativo del conocimiento existente. Como alternativa sugiere un modelo de imaginación-intuición para desarrollar la creatividad, la cual incluye la capacidad de ver nuevas relaciones y asociaciones entre ideas no relacionadas previamente (Tammadge, 1979, citado por Haylock, 1987, p. 60).

Algunos educadores como Nickerson (1987), Bazán (2001), Díaz (2003) y Terán (2010), han señalado la necesidad de cambiar a un enfoque alternativo que considere al alumno como un individuo potencialmente capaz y que le posibilite a este ir más allá de la simple recepción de los contenidos del programa. Dicho enfoque alternativo conlleva de manera implícita el desarrollo de potencialidades llamadas generalmente capacidades intelectuales, habilidades de pensamiento o pensamiento crítico.

El común denominador del enfoque alternativo es la necesidad de fomentar y desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes, para ello es necesario abordar los contenidos curriculares con la intención de potenciar las capacidades de pensamiento en lugar de acumular información o plantear situaciones rutinarias en las que el tema de estudio proporciona los procedimientos necesarios para resolver los ejercicios.

Sánchez (2013) menciona diferentes enfoques para mejorar y desarrollar habilidades cognoscitivas, los cuales se han puesto en práctica desde hace mucho tiempo en diversos países con el fin de influir en las directrices que deben seguir las políticas de Estado en materia de educación, en general, y, en particular, del aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, Zorrilla (2004) menciona:

> ... en 1991, el Conalte [Consejo Nacional Técnico de la Educación] defendió su propuesta relativa al establecimiento de un nuevo modelo de educación, argumentando la necesidad de lograr aprendizajes significativos en los alumnos para continuar aprendiendo a lo largo de su vida, lo cual sólo será posible si se otorga en el currículo una mayor importancia al desarrollo de actitudes, métodos y destrezas (Zorrilla, 2004, p. 7).

Por ejemplo, el Programa para la Modernización Educativa (SEP, 1990) en el primer año de secundaria (versión preliminar), plantea algunos lineamientos para el progreso del curso que se refieren principalmente al desarrollo de algunas habilidades matemáticas por medio del estudio de la aritmética. Dichas habilidades son: flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, memoria generalizada y resolución de problemas.

Esta propuesta empezó a someterse a prueba en una muestra reducida de escuelas en todas las entidades del país. Sin embargo, no logró cristalizarse debido a que otro tipo de decisiones políticas orientaron la reforma educativa en una dirección distinta (Zorrilla, 2004).

Otra propuesta más reciente es la que constituye el Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2016), que plantea que la memorización de hechos, conceptos y procedimientos son insuficientes y ocupan demasiado espacio en la enseñanza. El desarrollo de las capacidades de pensamiento crítico, análisis, razonamiento lógico y argumentación son indispensables para un aprendizaje profundo que permita trasladarlo a las diversas situaciones para resolver nuevos problemas.

En esta dirección, Hernández (2015) propone no considerar la solución de ejercicios o la aplicación de reglas o fórmulas como parte de una habilidad cognoscitiva, pues están incluidas dentro de las actividades básicas propias del alumno bajo un enfoque tradicional o basado en los contenidos. Para lograr un acercamiento a la adquisición de capacidades cognoscitivas, es necesario cambiar a situaciones o problemas no rutinarios en los que la solución no sea inmediata o dada por la temática en estudio. Para iniciar este cambio, se requiere investigar modelos teóricos con sugerencias de estrategias o métodos para abordar una enseñanza que desarrolle estas capacidades.

En la enseñanza de la matemática, prácticamente cualquiera de los contenidos puede ser utilizado para fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades matemáticas. Un buen inicio consiste en cambiar las instrucciones para la ejecución de un ejercicio, por ejemplo, es muy común indicar a los alumnos: resolver una ecuación como $4(x + 1) + 2 (x + 1) = 12$. Si el alumno desarrolla un procedimiento típico y encuentra $x = 1$, se piensa que es hábil. Aquí lo mostrado es una destreza para aplicar una serie de procedimientos para encontrar el valor de la incógnita y realizar la correspondiente comprobación.

Para desarrollar una habilidad matemática se debe cambiar el objetivo, por ejemplo, encontrar el valor de (x + 1) y guiar a los alumnos hacia un procedimiento alternativo como:

$$4(x+1) + 2(x+1) = 12$$
$$6(x+1) = 12$$
$$(x+1) = 2$$

Cuando el alumno desarrolla este procedimiento piensa en estructuras abreviadas y es flexible de pensamiento porque muestra la capacidad para librarse de procedimientos comunes (Krutetskii, 1976).

Como menciona Itelson (1985), cambiando el enfoque de la actividad se puede mostrar al alumno el mismo material bajo diferentes aspectos y educar en él distintos tipos de pensamiento.

De acuerdo con López Rueda:

> ... las habilidades matemáticas son herramientas intelectuales propiciatorias para la construcción de conexiones significativas entre ideas matemáticas, mediante el uso de estrategias y conocimientos, y desencadenan, según estas relaciones, formas particulares de razonamiento "contextual", es decir, el contexto del problema genera en la experiencia del resolutor una manera de organizar, interpretar y asignar un significado a la información de aquél y en consecuencia éste libera determinados argumentos.
>
> En ocasiones con solo analizar el enunciado de un problema un resolutor puede identificar las conexiones requeridas para resolverlo y, en consecuencia, afirmar si se trata de un problema de estimación o generalización, solamente por citar dos casos. Las habilidades evolucionan conforme el individuo avanza de manera permanente y sistemática en la interpretación y la resolución de problemas que cubren diversos contextos matemáticos.
>
> Dependiendo de la selección cuidadosa de los problemas y las actividades es como se promoverá el desarrollo de aquellas, de este modo, las habilidades adquiridas por el estudiante le permiten razonar de cierta forma sobre contenidos específicos y le ayudan a encontrar relaciones significativas, y la manera como organiza y mira esas conexiones está en función de sus conocimientos previos y

de las experiencias u oportunidades que le ofrece el medio en el cual se desenvuelve (López Rueda, 2009, p. 9).

Algunas razones para respaldar el desarrollo de habilidades matemáticas son:

- "El estudiante adquiere una visión integrada de los contenidos matemáticos al mostrar, entre otras cosas, flexibilidad para transitar sin dificultad por diferentes representaciones de un mismo concepto" (López Rueda, 2009, p. 14).
- "El estudiante se apropia de un conjunto de estrategias ricas y variadas, estas le ayudan a enfrentar de manera exitosa los problemas, es decir, adquiere una gama amplia de recursos facilitadores para estimar resultados, efectuar acciones reversibles como el análisis de atrás hacia adelante (del resultado a los datos y viceversa), imaginar la transformación o conservación de las propiedades de figuras y cuerpos geométricos y observar regularidades en arreglos geométricos y numéricos posibilitando la generalización de resultados y procedimientos" (López Rueda, 2009, p. 16).
- "El estudiante gana confianza y adquiere seguridad al saber que la solución de un problema, y las ideas que encierra un mismo concepto, se puede lograr por medio de distintas representaciones o diferentes procedimientos" (López Rueda, 2009, p. 18).

CAPÍTULO 2

PERSPECTIVAS SOBRE LA INVESTIGACIÓN EN HABILIDADES MATEMÁTICAS

La acción de asimilar y aplicar conocimientos por parte de los alumnos ha sido investigada por psicólogos y pedagogos, quienes la consideran la actividad prototipo del pensar.

Dentro de los trabajos con tratamiento relativo a las aptitudes y procesos del pensamiento, están las investigaciones de Rubinstein (1959), Shardakov (1963) y Krutetskii (1973, 1976). Estos trabajos revelaron cómo el pensamiento se realiza por medio de acciones mentales u operaciones intelectuales como el análisis y la síntesis, la abstracción, la generalización, la flexibilidad y la reversibilidad de pensamiento.

Aunque estos procesos están sujetos a leyes generales, la posibilidad de desarrollarlos depende del cumplimiento de ciertas condiciones acordes con estas leyes y de la posesión de cierto tipo de habilidades relacionadas con el objeto de estudio; esta es la razón de la existencia de otras aptitudes más específicas o habilidades matemáticas componentes de la capacidad matemática.

En el contexto de las investigaciones sobre habilidades matemáticas, algunos referentes clásicos son las investigaciones realizadas por el psicólogo soviético V. A. Krutetskii en 1973 y 1976. Krutetskii (1976) menciona: *para la resolución de problemas matemáticos*, es necesaria la posesión por el individuo de cierta estructura psicológica llamada la Estructura de las Habilidades Matemáticas, según él, esta estructura se puede desarrollar en la educación.

En su trabajo *El problema de la formación y desarrollo de las habilidades* (1973), establece actividades para formar y desarrollar las habilidades de acuerdo con los siguientes principios:

1. La actividad debe ser creativa (por lo menos subjetivamente creativa) en vez de reproductiva.
2. El desarrollo se debe orientar hacia las características de los componentes de las habilidades no completamente formadas y que se están formando bajo la influencia de la instrucción.
3. La actividad debe ser ampliamente motivadora, la persona debe sentir gran satisfacción en la realización de la actividad, por el reconocimiento de sus éxitos y logros en el área elegida.

Bajo estos principios, Krutetskii (1973) condujo un estudio destinado a desarrollar habilidades matemáticas en alumnos con poca capacidad, el problema se refiere a la superación de la relativa inhabilidad de los escolares con respecto a las matemáticas. Dicho estudio fue aplicado en un grupo selecto de escolares (de sexto y séptimo grados) clasificados como "incapaces" para el aprendizaje en matemáticas (ellos se desempeñaban satisfactoriamente o aún mejor en otras materias). El estudio mostró que los alumnos seleccionados simplemente no estaban atrasados (sus habilidades matemáticas estaban muy poco desarrolladas).

La instrucción se organizó basada especialmente en la determinación preliminar de las particularidades individuales del pensamiento de los estudiantes, y estructuradas sobre el principio de la instrucción individual, produciendo resultados positivos. Al inicio hubo dificultades para determinar los factores responsables para el avance de los alumnos seleccionados, es decir, si era debido a la formación de conocimientos previamente ausentes (o pobremente expresados), a la presencia de destrezas y hábitos o si se debía al desarrollo de habilidades, al finalizar la instrucción. Los experimentos definitivos mostraron un apreciable desarrollo de características psicológicas individuales tales como:

- La capacidad para la percepción formalizada del material matemático;
- la capacidad para la rápida y amplia generalización de objetos matemáticos, relaciones y operaciones;
- la flexibilidad de los procesos mentales; y
- la memoria matemática, memoria generalizada para sistemas de juicios y pruebas, para los métodos generales de solución de problemas.

En otro estudio posterior sobre la formación y desarrollo de habilidades matemáticas con alumnos más capaces (que los citados en el caso anterior), utiliza el método heurístico, y señala tres niveles o etapas basadas en los puntos siguientes:

1. Reconocimiento de la situación problemática.
2. Análisis de la situación, formulación del problema específico.
3. Solución del problema: avance y verificación subsecuente de hipótesis, verificación de la exactitud de la solución.

Las características del primer nivel en la instrucción con problemas son: el profesor propone y formula el problema a resolver y orienta al alumno hacia su solución independiente.

La característica relevante del segundo nivel es la presencia de capacidad en los alumnos para formular y resolver el problema propuesto, el cual solamente es señalado por el profesor.

En el tercer nivel, el maestro no indica el problema, el alumno lo percibe por sí mismo y lo puede formular e investiga caminos y medios para resolverlo. Como resultado desarrolla la capacidad para comprender el problema sin intervención del profesor, realizar un análisis de la situación problemática y encontrar la respuesta correcta.

Así la transición del nivel más bajo al más alto se basa en la reducción del volumen de información que el maestro proporciona al alumno (a menor información proporcionada por el maestro mayor es la actividad del alumno y viceversa).

Estos niveles se presentan en la tabla siguiente:

Tabla 2.1. Niveles que muestran las actividades del profesor y alumnos en la solución de problemas

Nivel	Número de elementos retenidos por el profesor	Número de elementos transferidos al alumno	Actividades del profesor	Actividades del alumno
Tradicional	3	_	Propone, fórmula y resuelve el problema.	Memorizan la solución del problema.
I	2	1	Propone y fórmula el problema.	Resuelve el problema.
II	1	2	Propone el problema.	Formula y resuelve el problema.
III	_	3	Orienta y organiza la actividad.	Reconoce, formula y resuelve el problema.

Fuente: elaborada de Krutetskii, 1973, pp. 127-145.

Krutetskii elaboró otro extenso estudio (entre 1955 y 1966) sobre la capacidad matemática de los alumnos, estableciendo el siguiente concepto básico de habilidad matemática:

> La habilidad para aprender las matemáticas de los cursos escolares, pero centrado en la resolución creativa de problemas; entendiendo por esto, el resolver un problema de varias maneras originales, el resolver problemas no rutinarios, la deducción independiente de fórmulas, en general, la manifestación de creatividad independiente de la instrucción escolar (Krutetskii, 1976, p. 68).

Este concepto se toma como referente para la elaboración de las definiciones operativas que se proponen más adelante.

Los resultados de su investigación le permitieron identificar varias capacidades o habilidades matemáticas esenciales para el dominio de la materia. Estas capacidades son:

1. Habilidad para una rápida, amplia y detallada generalización del material matemático.
2. Habilidad para abreviar el proceso de razonamiento.
3. Habilidad para el cambio de una forma de pensar directa a una inversa.

Estas habilidades se expresan en grados variables en alumnos capaces, promedio y menos capaces. Bajo algunas condiciones: los alumnos capaces demuestran "abreviación" y "reversibilidad" con un número mínimo de ejercicios, los alumnos menos capaces expresan estas habilidades débilmente y los alumnos promedio pueden desarrollarlas de modo muy gradual a través de un sistema de ejercicios especialmente organizados. En otras palabras, bajo condiciones idénticas, los alumnos capaces y los menos capaces experimentan asociaciones cuantitativa y cualitativamente diferentes.

Orton (1998) menciona de una forma más detallada los componentes de la capacidad matemática concebidos por Krutetskii (1976):

- Una capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.
- Una capacidad para generalizar a partir de resultados matemáticos.
- Una capacidad para operar con símbolos, incluyendo los números.
- Una capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas.
- Una capacidad de razonamiento lógico.
- Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.

- Una capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, incluyendo tanto la evitación de la fijación como la capacidad de invertir el curso del pensamiento.
- Una capacidad para lograr claridad, simplicidad, economía y racionalidad en las argumentaciones y pruebas matemáticas.
- Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas.

Las investigaciones realizadas por Krutetskii (1973, 1976) han sido un referente en el desarrollo de las capacidades matemáticas. Diversos educadores e investigadores han utilizado los problemas propuestos por Krutetskii (1976) en sus investigaciones para observar diferencias en los procesos de alumnos más o menos competentes en la solución de problemas o para diseñar modelos alternativos de enseñanza con el propósito de potenciar las habilidades matemáticas en diversos niveles educativos, desde la enseñanza de la Matemática Básica Chamberlin, 2010; (Daugherty, *et al.* 2015) hasta la enseñanza del Cálculo Integral y Diferencial (Flanders, 2014), Estadística y Probabilidad (Hernández, 2006).

Kaiser y Shore utilizaron nueve problemas de Krutetskii (1976, pp. 158-160): compararon las estrategias de estudiantes en decimoprimer grado, seleccionaron a 13 estudiantes competentes para un curso enriquecido y nueve para un curso regular. Los estudiantes competentes mostraron un conocimiento procesal más efectivo cuando cambiaron a estrategias alternativas apropiadas. Los estudiantes del curso regular (con la misma probabilidad de usar una estrategia alternativa apropiada) también usaron la estrategia de ensayo y error.

Chamberlin (2010) propone un modelo pedagógico de acuerdo con los componentes de la Estructura de las Habilidades Matemáticas señaladas por Krutetskii (1976), con el propósito de fomentar la creatividad en la resolución de problemas matemáticos. El modelo propuesto tiene cuatro niveles de tareas matemáticas para cuarto grado.

Tabla 2.2. Modelo pedagógico de acuerdo con la Estructura de las Habilidades Matemáticas señaladas por Krutetskii (1976)

Nivel	Ejemplos
Ejercicios	$\frac{478}{24}$
Problemas en palabras o historia	César tiene 4 manzanas y Manuel le dio 3 más. ¿Cuántas manzanas tiene ahora?
Problemas matemáticos	Sumar los números del 1 al 73, ¿cuáles son los dos últimos números de esta suma?
Resolución de problemas	Utilizando los datos presentados, identifique el mejor plan para su teléfono celular de acuerdo con sus necesidades y escriba una razón para su elección.

Fuente: Chamberlin, 2010, p. 63.

Daugherty *et al.* (2015) diseñan un modelo usando las habilidades de reversibilidad, generalización y flexibilidad propuestas por Krutetskii (1976). Los ejemplos son:

Tabla 2.3. Modelo de enseñanza 1. Usando reversibilidad, generalización y flexibilidad

	Expresiones	Ecuaciones
Estándar	Multiplicar $(2x + 3)(2x - 3)$	Resolver $4x^2 - 9 = 0$
Reversibilidad	Encontrar el binomio que al multiplicarlo por (2x-3) sea igual a $4x^2 - 9$	Encontrar la ecuación cuyas soluciones son, $\frac{3}{2}$, y $-\frac{3}{2}$
Generalización	Encontrar dos binomios cuyo producto sea un binomio, un trinomio, …	Encontrar una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean fracciones propias
Flexibilidad	Encontrar dos polinomios cuyo producto se pueda expresar como $4(x + 1)^2 - 9$	Resolver *a)* $4x^2 - 9 = 0$ *b)* $4(x + 1)^2 - 9 = 0$ *c)* $4(2x + 1)^2 - 9 = 0$

Fuente: Daugherty *et al.,* 2015, p. 273.

Daugherty *et al.* (2015) también plantean que muchos estudiantes con discapacidades de aprendizaje en matemáticas reciben educación matemática general en clases inclusivas, en consecuencia, los profesores deben hacer preguntas de diferentes maneras. Estos autores proponen un marco teórico con tres tipos de conceptos amplios: reversibilidad, generalización y flexibilidad para apoyar a los alumnos en la adquisición del pensamiento algebraico. Su propuesta es:

Tabla 2.4. Modelo de enseñanza 2. Usando reversibilidad, flexibilidad y generalización

Tipo de pregunta	Fracciones
Estándar	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$
Reversibilidad	Cuál de las siguientes fracciones $\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}, \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ su producto es $\frac{3}{8}$
Flexibilidad	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ ¿En qué se parecen estos problemas?
Generalización	Si los factores de un problema de multiplicación están entre 0 y 1 ¿qué puedes predecir acerca del resultado del producto?

Fuente: Daugherty *et al.*, 2015, p. 275.

Hernández (2006) realizó una investigación sobre habilidades matemáticas (flexibilidad, generalización y reversibilidad) referente a la comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en alumnos de nivel bachillerato, concluye con la manifestación de habilidades matemáticas en estadística y probabilidad. Dos problemas de este trabajo, sobre el concepto de media aritmética y sucesos aleatorios independientes son:

Primer problema. En un equipo de futbol, el promedio de estatura de los 11 jugadores es de 165 cm, pero se pretende aumentar el promedio a 168 cm. Para ello, en el próximo torneo se cambiarán a tres jugadores en activo por tres jugadores suplentes. ¿Cuáles deben ser las estaturas de los jugadores suplentes incorporados?

En esta situación se presentan las siguientes habilidades matemáticas:

- Reversibilidad de pensamiento, al aplicar el procedimiento para la media aritmética de manera inversa:

  $$(8)(165) = 1\,320 \text{ y } (11)(168) = 1\,848.$$

  La diferencia entre 1 848 cm y 1 320 cm es de 528 cm, en consecuencia, cada uno de los jugadores incorporados tiene 176 cm de estatura.
- La flexibilidad de pensamiento, al considerar diferentes estaturas de los tres jugadores: 175, 176 y 177 centímetros.
- Generalización, al comprender que la estatura promedio de los jugadores incorporados es una incógnita simbolizada con *x*: algunos alumnos propusieron la siguiente representación: $165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + 165 + x + x + x$ lo que corresponde a la ecuación $\frac{1\,320 + 3x}{11} = 168$.

Segundo problema. Para el segundo problema se presentan las siguientes instrucciones:

a) El objetivo es encontrar la regla (fórmula) para calcular la probabilidad de ocurrencia de *n* eventos independientes.

b) Completar la tabla siguiente hasta encontrar la regla o fórmula.

En *n* lanzamientos de un dado común se definen los eventos. A: obtener 6 en el primer lanzamiento y B: no obtener 6 en el segundo lanzamiento, de igual manera, no obtener 6 en el tercero como no obtener 6 en el cuarto lanzamiento y así sucesivamente hasta el enésimo lanzamiento.

Tabla 2.5. Lanzamiento de un dado

Número de lanzamientos: n	Evento	Probabilidad
1	A	$P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)$
2	$A \cap B$	$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
3	$A \cap B \cap B$	$P(A \cap B \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
4	$A \cap B \cap B \cap B$	$P(A \cap B \cap B \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
n	$\vdots$	$\vdots$

Fuente: Hernández, 2006.

Como resultado de esta actividad, los alumnos propusieron las siguientes simbolizaciones para la fórmula,

$$[P(A)]^{1}\,[P(B)]^{n-1} \;\; o \; P = \left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \;\; o \; P = \frac{5^{n-1}}{6^{n}}$$

De acuerdo con los trabajos anteriores, la flexibilidad de pensamiento, la generalización y la reversibilidad de los procesos mentales simbolizan las habilidades presentes en la descripción del pensamiento competente en matemáticas.

CAPÍTULO 3

CONSIDERACIONES TEÓRICAS ACERCA DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS

En este apartado se abordan con mayor detenimiento las habilidades matemáticas.

LA FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO

En su mayoría, los profesores de matemáticas han encontrado alumnos con una firme preferencia por métodos o algoritmos rígidos apropiados e inapropiados; estos métodos en ocasiones resultan ineficientes en la solución de problemas. Alumnos con estas preferencias construyen sus propias reglas y las aplican en situaciones análogas a una situación previa sin analizar el caso concreto que están resolviendo.

Algunos educadores matemáticos (Cunningham, 1966; Haylock, 1985, 1987, 1997; Sharma, 2013) se han aproximado a las ideas de rompimiento de fijaciones y de rigidez mental, considerando principalmente las nociones de pensamiento flexible y pensamiento divergente como componentes de la creatividad en las matemáticas escolares. Estos educadores han usado la noción de pensamiento divergente en situaciones matemáticas como una forma de identificar la flexibilidad de los procesos mentales señalados por Krutetskii (1976).

Con respecto a esto, Sharma menciona: "la rigidez es una especie de fenómeno retroactivo. Por lo general tratamos de resolver problemas sobre la base de nuestras experiencias anteriores. Pero, a veces, las experiencias y métodos anteriores no son útiles para resolverlos" (2013, p. 17).

Krutetskii (1976) identifica la flexibilidad de los procesos mentales como un componente importante de las habilidades matemáticas en los escolares. Esta flexibilidad se muestra, por ejemplo, en el vencimiento de fijaciones o en el rompimiento de un método estereotipado de solución encontrando diversos caminos para resolver un problema. El énfasis en esta habilidad se centra en el rompimiento de los estereotipos para mostrar la flexibilidad de pensamiento como una descripción de la habilidad matemática.

El trabajo de Krutetskii (1976) tiene dos ideas clave que parecen surgir como las más relevantes: la fijación algorítmica y la fijación universal del tema.

En la fijación algorítmica, el alumno puede mostrar rigidez en matemáticas por el uso continuo de un algoritmo inicialmente exitoso, aun cuando llega a ser inapropiado.

Por ejemplo, cuando se emplean situaciones muy rutinarias, pongamos por caso eliminar la raíz cuadrada del denominador de: $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{7}}$, y así (hasta digamos 10 ejercicios muy semejantes), al incluir una situación como $\frac{2}{\sqrt{4}}$, si el estudiante multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{4}$ está resolviendo las situaciones siguiendo un esquema rígido, sin razonar acerca del significado de las operaciones.

Haylock (1997) menciona el caso de la multiplicación de 20 x 10, algunos estudiantes muestran preferencia por el algoritmo, aun cuando reconocen la respuesta como 200.

A este respecto, Haylock (1985) comenta otra posible causa que es que el alumno percibe la matemática como un conjunto de reglas para aprender y aplicar rigurosamente.

La fijación universal del tema puede ser provocada cuando el estudiante hace suposiciones no incluidas en el planteamiento del problema, cuando el alumno restringe inapropiada o innecesariamente el rango de elementos para usarse, o relacionadas con el problema dado. Tres ejemplos son:

- Cuando se le pide al alumno resolver una ecuación cuya solución es un número racional, puede argumentar que "no tiene solución", restringiendo su rango de respuestas a los números enteros.
- Si se le pide encontrar dos números de manera que sumen 9 y su diferencia sea 2. Aquí es necesario vencer la fijación por los números naturales y ampliar su interpretación de números, para incluir los números fraccionarios (5.5 y 3.5) (Haylock, 1997).
- Cuando el alumno considera que $y = k$ no es función "porque no hay x".

De Bono, citado por Rugarcía y Delgado (1987), hace una importante distinción entre pensamiento convergente y pensamiento divergente al resolver problemas. Esto se relaciona con la creatividad: el pensamiento convergente conduce a una reducción de las alternativas de solución; mientras que el pensamiento divergente lleva a una ampliación de la definición del problema, para generar una gran variedad de soluciones posibles, muchas de las cuales son aceptables y algunas de ellas pueden ser creativamente superiores. Esta parece ser una de las diferencias críticas entre el proceso creativo de solución de problemas y el no creativo.

Con respecto al proceso creativo, Balka (1974) propone seis criterios para evaluar la actividad creativa en matemáticas:

1. La capacidad de formular hipótesis matemáticas sobre la causa y el efecto en una situación matemática (divergente).
2. La capacidad de determinar patrones en situaciones matemáticas (convergente).
3. La capacidad de romper con la mentalidad establecida para obtener soluciones en una situación matemática (convergente).

4. La capacidad de considerar y evaluar ideas matemáticas inusuales, de pensar en sus consecuencias para una situación matemática (divergente).
5. La capacidad de detectar lo que falta en una situación matemática dada y hacer preguntas que le permitirán a uno completar la información matemática que falta (divergente).
6. La capacidad de dividir los problemas matemáticos generales en subproblemas específicos (divergente).

La relación entre creatividad matemática y los logros matemáticos ha sido explorada usando los "test de producción divergente", en los que a los estudiantes se les dan situaciones matemáticas o problemas y se les pide que produzcan muchas y variadas respuestas, evaluando la creatividad en términos de medidas tales como facilidad (número de respuestas), flexibilidad (número de categorías de la respuesta) y originalidad (la infrecuencia estadística de las respuestas).

Haylock (1987) sugiere tres caminos para la construcción de test en los que el pensamiento divergente ha sido reconocido:

1. Solución de problemas, por ejemplo: si $(p + q)(r + s) = 36$, ¿cuáles son los valores enteros posibles que pueden tomar p, q, r, s?
2. Modelar situaciones problemáticas: Prouse (1967) y Balka (1974) hacen uso de cuestiones en las que al estudiante se le presenta un párrafo que contiene información numérica (por ejemplo, acerca de viajes o costos) y se le pide escribir tantas cuestiones como sea posible acerca de la situación y cuáles se pueden contestar con la información dada.

Veamos los siguientes ejemplos adaptados:

- Con la siguiente información inventa un problema matemático difícil de resolver, en su solución utiliza varias operaciones, si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información: un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación de la ciudad A, a las 10 pm, con destino a una ciudad B. El tren tiene una capacidad máxima de 300 pasajeros (Espinosa *et al.,* 2012).

- Formular problemas a partir de la siguiente tabla:

Tabla 3.1. Auxiliar para formular problemas de tipo 2^n

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32

Fuente: Espinosa *et al.,* 2012.

Problema 1. ¿Cuál es la suma de las primeras 5 potencias de 2?
Problema 2. Juan quiere formar un club de videojuegos, actualmente él es el único socio, pero planea aceptar un socio cada mes con la condición de que cada nuevo socio encuentre dos nuevos socios, ¿cuántos socios tendrá el club después de 4 meses? (Callejo de la Vega, 2003).

Según Lupiañez (2014), la invención de problemas es una actividad para mirar la comprensión matemática de los estudiantes, también revela mucho sobre la adquisición de conocimientos, habilidades, creatividad, significado de los conceptos aprendidos, así como características de sus experiencias matemáticas escolares.

3. Redefinición: se dan al alumno situaciones para responder en muchos, variados y originales caminos, solamente por la continua redefinición de los elementos de la situación en términos de sus atributos matemáticos. Por ejemplo, Haylock (1987) propone a los estudiantes un diagrama geométrico y les pide escribir tantas afirmaciones diferentes como sea posible acerca de un segmento de recta en el diagrama. Para tener éxito en esta tarea se requiere de una continua redefinición del segmento en términos de sus relaciones con las otras partes del diagrama.

La redefinición de Haylock (1987) es anticipada por Rubinstein (1963) como parte esencial en la solución de problemas: en el transcurso del análisis (a través de la síntesis), los elementos iniciales del problema (por ejemplo, segmentos en los problemas geométricos), al adquirir nuevas relaciones cada vez aparecen con una nueva cualidad, en consecuencia, con una nueva caracterización conceptual (como bisectriz de un ángulo, como mediana o como secante de dos líneas paralelas); así la formulación de un problema de uno u otro modo influye de manera decisiva en la orientación del análisis y en el curso de su solución.

Pongamos por caso: *a)* encontrar la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 16 cm o *b)* se tiene un cuadrado cuyo perímetro mide 16 cm, dividir el cuadrado en dos triángulos rectángulos y encontrar la longitud de la hipotenusa de uno de los triángulos.

Con respecto a la formulación de problemas, Koedinger y Nathan (2004) realizaron un estudio en el que identificaron dos maneras en las que las representaciones externas pueden cambiar el rendimiento de los estudiantes. Primera, el rendimiento puede cambiar porque una representación externa es más difícil de comprender que otra. Segunda, el rendimiento puede cambiar porque las diferentes representaciones externas pueden ser comprendidas de diferentes maneras y a su vez mostrar distintas estrategias de procesamiento.

Un ejemplo de formulaciones diferentes usado en su estudio se muestra a continuación.

Primera formulación. Cuando Ted salió de su trabajo de mesero, tenía \$81.90 como ganancia de ese día y restó \$66 que recibió de propinas. Luego dividió el dinero restante entre las 6 horas de trabajo y obtuvo su salario por hora. ¿Cuánto gana Ted por hora?

Este planteamiento lleva a la ecuación $\frac{(81.9 - 66)}{6} = x$

Segunda formulación. Cuando Ted sale de su trabajo de mesero, multiplica su salario por hora, por 6 horas de trabajo en ese día;

después suma \$66 que le dieron de propina, si en total tenía \$81.90, ¿cuánto gana Ted por hora? Esta segunda formulación lleva a la ecuación $(x)\ (6) + 66 = 81.90$.

Paralelamente a la fijación y rigidez señaladas por Krutetskii (1976), Cohen (1987) menciona:

> ... la rigidez mostrada por los estudiantes en su selección de estrategias puede ser atribuida al predominio de los efectos de sus experiencias iniciales y a su limitada elección de métodos para resolver ecuaciones u otros conceptos algebraicos. Un ingrediente esencial en la importante actividad de resolver problemas en álgebra es la habilidad del estudiante para aproximarse a un problema desde perspectivas diferentes, así la cuestión es cómo fomentar esta habilidad y, por consiguiente, la flexibilidad de pensamiento (Cohen, 1987, p. 295).

Según Menschinskaia:

> ... la flexibilidad de pensamiento consiste en la posibilidad de cambiar los medios para la solución cuando éstos resulten equivocados. El sujeto de pensamiento flexible está libre de las suposiciones impuestas y de los métodos rutinarios para resolver problemas, sabe apreciar los cambios que exigen modificar el planteamiento de las preguntas, así como renunciar a las soluciones anteriores y tomar otras nuevas (Menschinskaia, 1960, p. 266).

López Rueda plantea las siguientes sugerencias para favorecer la flexibilidad de pensamiento: "Representar un mismo concepto de diferentes maneras. Es importante fomentar en los estudiantes la construcción y conexión entre diferentes representaciones de un mismo concepto. El docente debe promover y facilitar esas acciones (2009, p. 61).

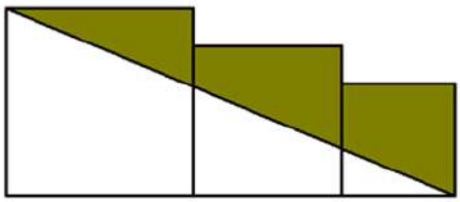
Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas:
$x^2 - x - 6 = 0$ y $3x^2 - 3x - 18 = 0$, tienen la misma solución, $x = 3$ y $x = -2$.

"Motivar a los estudiantes para resolver un mismo problema de diferentes maneras. Saber esto puede estimular la confianza de los estudiantes y ellos aprenden a creer en su propio trabajo” (López Rueda, 2009, p. 63).

Para ejemplificar lo anterior se presenta el siguiente problema:

Tres cuadrados con lados de longitudes 10 cm, 8 cm y 6 cm, respectivamente, se colocan uno al lado del otro. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

Figura 3.1. Tres cuadrados con área sombreada



Propuestas de solución:

a) El área del primer cuadrado es (10 cm)(10 cm) = 100 cm^2, el área del segundo cuadrado es 64 cm^2 y el área del tercer cuadrado es 36 cm^2, al sumar estas áreas se obtiene 200 cm^2. El área del triángulo (parte no sombreada) es $\frac{(10\text{ cm})(10+8+6\text{ (cm)})}{2}$ = 120 cm^2.

Por lo que el área de la parte sombreada es 200 cm^2 – 120 cm^2 = 80 cm^2.

b) Si completamos el rectángulo, su área es (10 cm)(10 cm+8 cm+6 cm) = 240 cm^2. Las figuras que faltan para completar el rectángulo son dos rectángulos de áreas (8 cm)(2 cm) = 16 cm^2 y (6 cm)(4 cm) = 24 cm^2 respectivamente. El área del triángulo (parte no sombreada) es $\frac{240\text{ cm}^2}{2}$ = 120 cm^2.

De acuerdo con lo anterior, el área sombreada es (120 cm^2 – 16 cm^2 – 24 cm^2) = 80 cm^2.

“Es importante que los alumnos reconozcan problemas con más de una solución porque esto es una invitación para comprobar sus resultados e intercambiar opiniones con sus compañeros" (López Rueda, 2009, p. 64).

La reversibilidad de pensamiento

Diversos pedagogos y educadores coinciden con la siguiente afirmación: el desarrollo de la operación mental de la reversibilidad es uno de los componentes y, al mismo tiempo, uno de los índices fundamentales de la formación mental de los alumnos en los contenidos escolares.

De manera general, la reversibilidad de pensamiento consiste en partir de datos iniciales, generar un proceso directo de solución para arribar a un resultado y utilizar este resultado (o uno semejante) para llegar a los datos iniciales o a una situación similar, por ejemplo: proceso directo, encontrar una ecuación de la parábola de vértice $(3, -4)$; proceso inverso, la ecuación de una parábola es $y = -2x^2+4x+1$, encontrar las coordenadas de su vértice.

El uso de tareas directas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática consiste en aplicar reglas y procedimientos que están dados por el tema de estudio. Si queremos fomentar el cambio en los procedimientos con el objetivo de potenciar esta habilidad de pensamiento en nuestros alumnos, es necesario guiarlos hacia el redescubrimiento de las reglas que han sido previamente aplicadas. Los docentes debemos ser conscientes de que al desarrollar esta habilidad existe cierta resistencia hacia un cambio para "pensar hacia atrás", porque los alumnos muestran fijación hacia el resultado obtenido en el problema planteado inicialmente.

Una sugerencia básica para romper esta fijación consiste en enfrentar a los alumnos con tareas directas e inversas, es decir, para que los alumnos entiendan cuándo un problema es inverso, deben compararlo con el problema directo; en el problema directo se parte de los datos y se llega a una solución, pero en el problema inverso la solución ahora se transforma en los datos y no necesariamente se llega a los datos originales como solución.

Los problemas planteados deben ser inversos desde la perspectiva del alumno, de manera que al llegar a la solución pueda construir un proceso reversible para volver al inicio, considerando que en los procedimientos reversibles puede dar varios rodeos hasta conseguir la condición inicial.

Syarifatul *et al.* (2017) identifican aspectos del pensamiento reversible de un estudiante de primaria ganador de medallas olímpicas nacionales en ciencias resolviendo un problema algebraico. El problema presentado es: dada la igualdad $24 + a = 16$, construir tantas ecuaciones como sea posible.

Tabla 3.2. Aspectos del pensamiento reversible

Aspectos del pensamiento reversible	Explicación
Negación	Cuando el sujeto utilizó la inversión hacia la operación relacionada.
Reciprocidad	Cuando el sujeto usa compensación o cualquier otra relación equivalente con una ecuación dada.
Capacidad para regresar a los datos iniciales después de obtener el resultado.	Cuando el sujeto regresa a la ecuación inicial usando procedimientos correctos.

Fuente: Syarifatul *et al.*, 2017, p. 190.

Tabla 3.3. Aspectos revelados del pensamiento reversible

Actividad	Aspectos revelados del pensamiento reversible
Ecuación original: $24 + a = 16$. El sujeto divide ambos lados de la ecuación entre 4, para obtener: $\frac{24 + a}{4} = 4$	Reciprocidad
Extrae raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación: $\frac{24 + a}{4} = 4$ $\sqrt{\frac{24 + a}{4}} = 2$	Reciprocidad

(continuación)

Eleva al cuadrado ambos miembros de la ecuación $\sqrt{\frac{24+a}{4}} = 2$ $\frac{24+a}{4} = 2^2$	Reciprocidad
Multiplica ambos lados de la ecuación $\frac{24+a}{4} = 2^2$ por 4, para obtener: $24 + a = 16$	Reciprocidad y capacidad para regresar a los datos iniciales.

Fuente: Syarifatul *et al.,* 2017, p. 192.

Ramful afirma:

> ... al "trabajar hacia atrás" se parte de lo que se requiere y se asume lo buscado como conocido. Es necesario, no solamente invertir las operaciones sino también la secuencia de estas. Esto se ilustra en la siguiente figura, donde se observa el proceso para encontrar la función inversa de $y = 4x + 1$.
>
> Función Directa: $x \rightarrow$ *multiplicar por* 4 $\rightarrow 4x \rightarrow$ *sumar* 1 $\rightarrow 4x+1$
> Función Inversa: $y \rightarrow$ *restar* 1 $\rightarrow y - 1 \rightarrow$ *dividir entre* 4 $\rightarrow \frac{y-1}{4}$
> (Ramful, 2015, p. 28).

Martínez (2013) menciona la abundancia y prevalencia de los problemas directos en los cursos tradicionales de matemáticas. No obstante, si se desea cambiar los contenidos de los cursos, los problemas inversos deberían tener un papel preponderante y plantearse desde los niveles de educación básica (primaria y secundaria).

En la escuela primaria se enseña a multiplicar los números naturales. Más interesante es el problema inverso consistente en escribir un número natural como producto de otros dos. El planteamiento reiterado de este problema inverso puede desembocar en el Teorema Fundamental de la Aritmética.

En la enseñanza secundaria sucede algo similar con la multiplicación de polinomios y su inverso: la factorización de polinomios, que conduce a otro teorema central de la matemática (el Teorema Fundamental del Álgebra).

En este sentido, Mora (2012) establece que los procesos reversibles de pensamiento no son atendidos por los docentes en los estudiantes. El trabajo en el aula se centra en la memorización y el desarrollo de fórmulas, limitando a los alumnos a seguir lo ya establecido y sin generar en ellos la capacidad de solucionar problemas con diversas estrategias.

De acuerdo con Martínez (2013), otras situaciones reversibles que se presentan en la enseñanza de la matemática en el nivel bachillerato son:

- Los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica, *a)* dada la ecuación, encontrar su gráfica correspondiente o lugar geométrico; y *b)* dado el lugar geométrico, determinar su ecuación.
- Los procedimientos directos del Cálculo Diferencial y los procedimientos inversos del Cálculo Integral. Por ejemplo $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ y $\int 2xdx = x^2 + c$ (Flanders, 2014).
- En Estadística y Probabilidad: una situación directa es, si X es una variable aleatoria discreta con función de distribución de probabilidad (f. d. p), binomial, con n = 6 y q = 0.6, asignar probabilidades a los valores de la variable. La inversa es: si X es una variable aleatoria discreta con f. d. p. binomial, E (X) = np = 2 y σ^2 = npq = $\frac{4}{3}$ encuentre el valor de n y el valor de p (Hernández, 2015).

Ruesga *et al.,* mencionan que en matemáticas

> ... es posible identificar dos procesos relacionados diferenciables. Uno de ellos tiene lugar cuando las relaciones progresan desde los datos, situaciones de partida o condiciones suficientes y, en general, desde las causas, en la búsqueda de las soluciones, situaciones finales o condiciones necesarias, es decir hacia los efectos. El otro progresa en sentido contrario, esto es, en general desde los efectos a las causas. Estas formas relacionales se presentan entremezclada, casi

> conjunta y componen pasajes que permiten alcanzar el objetivo de la situación problemática a la que pertenecen. Estos procesos se identifican como los constitutivos de la reversibilidad piagetiana del pensamiento para el caso de los cálculos algorítmicos (Ruesga *et al.*, s.f., p. 3).

Ejemplo: encontrar la ecuación de la parábola de vértice (–1,1), con eje vertical y lado recto igual a 2. Con esta información se puede utilizar la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$; por lo que al sustituir la información se tiene el resultado $(x + 1)^2 = 2(y - 1)$ la cual se puede transformar en $y = 0.5x^2 + x + 1.5$.

Para llegar a los datos iniciales, se parte del resultado $y = 0.5x^2 + x + 1.5$:

$$y - 1.5 = 0.5x^2 + x$$

$$\frac{y - 1.5}{0.5} = x^2 + 2x$$

$$2y - 3 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$2y - 2 = (x + 1)^2$$

$$2(y - 1) = (x + 1)^2$$

Para Mora (2012), la reversibilidad de pensamiento es una manera de pensar más amplia, posibilita replantear un problema de forma diversa, lo cual genera una cantidad significante de diferentes opciones. El pensamiento reversible puede generar procesos que entran en conflicto.

Por ejemplo:

Problema directo. Explicar geométricamente cómo se construye la raíz cuadrada de un número representado por un segmento rectilíneo.

Problema inverso. Explicar geométricamente cómo se construye el cuadrado de un número representado por un segmento rectilíneo.

De acuerdo con Shardakov (1963), la reversibilidad constituye uno de los rasgos cualitativos de los nexos y relaciones entre los fenómenos de la realidad. Se manifiesta en la influencia dinámica y recíproca ejercida entre sí por los componentes de un todo. En la dependencia causal manifestada en ciertos fenómenos existe no solo la dependencia directa de causa a efecto, sino también la contraria de efecto a causa. Semejante forma de reversibilidad en la dependencia causal y funcional se observa en los conceptos matemáticos y fenómenos físicos, químicos y de otro tipo. En todos estos casos, la reversibilidad se manifiesta cuando a una operación le corresponde otra, inversa a la primera.

Por ejemplo, al expandir el binomio $(b-(x+a))^2$ significa hallar el cuadrado de la diferencia de dos números: $b^2-2b(x+a)+(x+a)^2$ esta es una dependencia directa. Pero descomponer en factores $b^2-2b(x+a)+(x+a)^2$, equivale a encontrar el mismo valor $(b-(x+a))^2$ y esto es una dependencia inversa.

Stavy y Rager (1990) reportan un estudio con alumnos de noveno y décimo grado sobre relaciones inversas (el caso de la cantidad de materia), en problemas simples de química. Encontraron que la reflexión sobre razones inversas es más difícil en comparación con el razonamiento sobre las razones directas, mencionando el interés de encontrar la causa de esta dificultad y si existe relación con la dificultad de resolver problemas paralelos de razón inversa, por ejemplo, en matemáticas, o si se relacionan solamente por el contenido específico de estos problemas de química.

Para Krutetskii (1976), la reversibilidad de un proceso mental significa una reconstrucción en el sentido de cambiar de un tren de pensamiento directo a uno inverso. En su trabajo distingue dos procesos diferentes pero interrelacionados. En primer lugar, está el establecimiento de una asociación de dos direcciones (cadenas) de tipos $A \longleftrightarrow B$, como opuesto a una cadena del tipo $A \longrightarrow B$, la cual funciona únicamente en una dirección. En segundo lugar, la reversibilidad de los procesos mentales de razonamiento pensando en una dirección inversa, partiendo del resultado o del producto de los datos iniciales, lo cual ocurre, por ejemplo, en la transición de un teorema directo a uno inverso. En un tren de pensamiento inverso, el pensamiento no viaja por la misma ruta precisamente, sino que solo se mueve en sentido inverso.

En ambos casos ocurren "cambios repentinos" en el pensamiento para moverse de una ruta directa a una inversa, y estos cambios representan ciertas dificultades para muchos alumnos. Una fijación hacia la meta es aún retenida en la mente, pero se debe hacer un cambio brusco inmediatamente después empezando a moverse desde la meta en dirección inversa. Esto proporciona bases para poner de manifiesto la flexibilidad de pensamiento.

La reversibilidad y la flexibilidad de pensamiento son habilidades relacionadas. La exploración de varias vías de solución, la posibilidad de ver alternativas en los procedimientos de solución de un mismo problema, de valorar sus aspectos positivos y negativos, de compararlas y, si se justifica, pasar a otra vía más adecuada, constituye una de las condiciones psicopedagógicas del desarrollo del pensamiento flexible.

De acuerdo con López Rueda

> ... la matemática es un campo de estudio que incluye problemas, actividades, conceptos y procedimientos relacionados en algunos casos, por medio de enunciados o acciones reversibles. El estudiante tiene mejores posibilidades para analizar y comprender ideas que implican acciones de ida y vuelta cuando el docente presenta oportunidades para desarrollar esta habilidad denominada reversibilidad (López Rueda, 2009, p. 64).

Algunas sugerencias para fomentar el desarrollo de esta habilidad son:

"Proponer a los estudiantes que analicen parejas de problemas reversibles" (López Rueda, 2009, p. 65)".

Por ejemplo:

- Hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 3 cm.
- La diagonal de un cuadrado mide 6 cm, hallar la medida de sus lados.

"Estimular a los alumnos para que inventen y resuelvan otros problemas al intercambiar algunos de los datos del problema inicial por su pregunta" (López Rueda, 2009, p. 65).

Por ejemplo:

- Para una función de circo se vendieron 850 entradas. El número de niños presentes en la sesión fue el cuádruple del número de adultos y solo 150 niños obtuvieron regalo. ¿Cuántos niños no consiguieron regalo?
- En una función de cine para niños y adultos, 471 niños no obtuvieron descuento, entre ellos solamente 126 pagaron medio boleto, si el número de adultos en la función fue un tercio del número de niños, ¿cuántas entradas completas se vendieron?

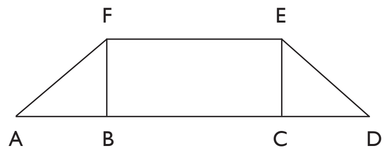
"Proponer a los estudiantes la comprobación de resultados, es común que cometan errores en los procedimientos y no lo adviertan, posiblemente se deba a la falta de conocimientos básicos. En álgebra la comprobación de resultados ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre sus acciones" (López Rueda, 2009, p. 66).

Por ejemplo:

En el siguiente problema se presentan tres propuestas de solución (dos incorrectas y una correcta). El docente debe promover la reflexión en sus alumnos para analizar las propuestas de solución y realizar una visión retrospectiva sobre la validez de la propuesta elegida.

El área del triángulo ABF es 10% del área del trapecio isósceles ADEF. El rectángulo BCEF tiene 144 cm^2 de área y CD es igual a CE. ¿Cuál es la longitud de AD?

Figura 3.2. Trapecio Isósceles ADEF



Propuestas de solución:

a) Observando los triángulos ABF y DCE se puede decir que la suma de sus áreas es la mitad del área del rectángulo BCEF, por lo que si el área del rectángulo es de 144 cm^2, entonces el área de los triángulos es 72 cm^2, y el área de cada triángulo es 36 cm^2. De lo anterior se concluye que la longitud del segmento AD es: AB + BC + CD = 6 cm + 12 cm + 6cm = 24 cm.

b) 10% de 144 cm^2 es 14.4 cm^2, por lo tanto, si sumamos las áreas de los triángulos isósceles ABF y DCE obtenemos (14.4 + 14.4) cm^2 = 28.8 cm^2. De aquí se sigue que dividiendo 28.8 cm^2 entre 4 se obtienen las longitudes AB y CD, por lo tanto, la longitud de AD es 7.2 cm + 12 cm + 7.2 cm = 26.4 cm.

c) Si el área del rectángulo es de 144 cm^2, entonces el área del trapecio equivale a 144 cm^2 + área de los triángulos ABF y CDE. Estos triángulos tienen las mismas medidas de sus lados porque su hipotenusa es el lado no paralelo del trapecio isósceles y tienen la misma altura que el rectángulo. De acuerdo con lo anterior, el área de ambos triángulos es de 20% (es decir $\frac{1}{5}$ del área del trapecio ADEF) que sumada con el área del rectángulo da el total (100%) correspondiente al área del trapecio que se puede descomponer como: 36 cm^2 + 144 cm^2. Así, 144 cm^2 corresponde a $\frac{4}{5}$ del área del trapecio. En consecuencia, $\frac{2}{5}$ equivalen a 72 cm^2 y $\frac{1}{5}$ equivale a 36 cm^2. El área de los dos triángulos rectángulos isósceles forma un cuadrado de 36 cm^2. De aquí se concluye que AB = CD = 6 cm. Por lo tanto AD = AB + BC + CD = (6 + 24 + 6) cm = 36 cm.

La generalización

En la enseñanza de la matemática, el desarrollo de la habilidad para generalizar es esencial porque permite explicitar de forma general las relaciones numéricas. Las representaciones de los números exigen una representación general para entender de manera cualitativa sus propiedades, por ejemplo, representar los números pares como $2n$ permite verificar que son divisibles entre 2.

Por su misma naturaleza, es en el álgebra donde la característica de la generalidad está presente, por lo anterior es necesario el acercamiento del docente a algunos planteamientos teóricos y prácticos para guiar a los alumnos en el logro de sus primeras generalizaciones.

Para Villa (2006), la generalización es un proceso al cual algunos investigadores en educación matemática han dedicado varios trabajos; por su parte, Mason (1999) afirma que la generalidad es la vida de las matemáticas y el álgebra es el lenguaje para expresar dicha generalidad.

Desafortunadamente muchos temas presentes en el currículo se pueden resolver por medio de un algoritmo, pero si los niños no entran en contacto con los problemas fundamentales que el tópico resuelve, si no tienen vivencias de las conexiones con otros tópicos, entonces los estudiantes pueden, a lo más, tratar de entrenar un comportamiento haciendo una gran cantidad de ejemplos (Mason, 1999).

Como contraparte a este enfoque, Mason (1999) plantea dos conjeturas:

- La generalización reside en el corazón de las matemáticas.
- La capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela.

Para probar estas conjeturas, propone ejemplos de secuencias numéricas a partir de las cuales los niños pueden:

- Usar sus capacidades de detectar patrones y generalizar para aprender a multiplicar expresiones con paréntesis y números negativos, lo mismo que a factorizar expresiones cuadráticas.
- Tener vivencias de expresiones cuadráticas como sus propias expresiones de generalidad en los números y no simplemente como "expresiones aritméticas con letras" propuestas por otros.

La siguiente tabla muestra secuencias numéricas.

Tabla 3.4. Secuencias numéricas

(1) (6) + 6 = (3) (4)	**(1) (7) + 8 = (3) (5)**	**(1) (8) + 12 = (4) (5)**
(2) (7) + 6 = (4) (5)	(2) (8) + 8 = (4) (6)	(2) (9) + 12 = (5) (6)
(3) (8) + 6 = (5) (6)	(3) (9) + 8 =	
(4) (9) + 6 = (6) (7)		
(5) (10) + 6 = (7) (8)		

Fuente: Mason, 1999, p. 238.

Para Mason (1999), la idea de estas secuencias es guiar a los estudiantes para descubrir las reglas de operación, de manera que las expresiones sobre las que trabajan y las reglas usadas sean sus propias expresiones de generalidad y no simplemente las normas de operación dadas por el profesor o por el texto.

Es importante destacar la generalidad, referida por Mason (1999) como un proceso de descubrimiento de las reglas operativas, que se puede caracterizar por los medios que los sujetos utilizan para "reconocerla", por ejemplo: identificar cantidades variantes e invariantes en las secuencias numéricas mostradas con anterioridad. En su actividad los sujetos no solo necesitan reconocer la generalidad, sino también contar con formas de expresarla como posibilidad de "actuar" u operar con ella. Esto plantea la necesidad de incorporar en el trabajo de aula actividades que potencien procesos de generalización, por ejemplo, a partir del reconocimiento de patrones en secuencias de figuras y en secuencias numéricas.

En este sentido, de acuerdo con Castro *et al.*:

> ... el reconocimiento de patrones lleva implícitos muchos otros conceptos como la identificación de forma, color, tamaño, dirección, orientación o relaciones numéricas. Crear y reconocer patrones es una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos, sobre todo en aquellos casos en los que las cuestiones pueden ser resueltas examinando casos especiales organizando a continuación los datos sistemáticamente determinando un patrón y usándolo para obtener la respuesta. Por ejemplo, en el caso de hacer generalizaciones en problemas con patrones de tipo lineal o cuadrático a través de expresiones algebraicas (Castro *et al.*, 1995, p. 71).

Dos ejemplos de tareas propuestas por Castro *et al.* (1995) son:

Primera. Dada la siguiente sucesión numérica: 2, 5, 8, 11, …

- Realiza una representación puntual de los cuatro primeros términos.
- Escribe su término general.

Segunda. Desarrolla esta tarea de la siguiente manera:

- Inventa el término general de una sucesión.
- Señala la propiedad común a los términos.
- Haz una representación puntual de los tres primeros términos.

Ávila *et al.* (2010) investigaron la habilidad para generalizar patrones cuadráticos en alumnos de licenciatura en matemáticas. Las fuentes consultadas para la preparación de su trabajo, principalmente con estudiantes de nivel medio superior, indican resultados similares a los obtenidos con su investigación. Al no estar presentes en los programas las habilidades de generalización, el desarrollo de los estudiantes en este rubro es muy modesto en el nivel superior.

Para Polya (1986), la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

Krutetskii (1976) menciona que cualquier generalización efectiva en el contexto del simbolismo numérico y algebraico puede ser considerada desde dos puntos de vista:

- Ser capaz de ver una situación similar (dónde aplicar).
- Ser capaz de manejar un tipo de solución generalizada de una prueba o argumento (qué aplicar).

En uno u otro caso, se debe hacer abstracción del contenido específico y aislar lo similar, general y esencial en la estructura de los objetos, relaciones y operaciones.

En su estudio de las habilidades matemáticas, Krutetskii (1976) considera la habilidad para generalizar bajo dos perspectivas:

1. Como una habilidad personal para ver algo general y reconocerlo en lo que es concreto y particular (tratar un caso particular bajo un concepto general conocido).

Por ejemplo en $(113)^2 - (112)^2$, reconocer una diferencia de dos cuadrados y usar el procedimiento $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, por lo que $(113)^2 - (112)^2 = (113 + 112)(113 - 112) = (225)(1) = 225$.

2. Como la habilidad para ver algo general y establecer lo desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general de casos particulares para formar un concepto).

Por ejemplo, en la secuencia $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ encontrar la regla general, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

Para el alumno no es lo mismo aplicar una fórmula a un caso particular dado que deducir una fórmula desconocida sobre las bases de unos casos particulares.

En este sentido, Rubinstein (1963) menciona que la transferencia de la solución de un problema a otro semejante no solo exige un análisis la generalización que parte de los casos particulares a una fórmula generalizada, sino también la aplicación de la fórmula a casos concretos, el análisis de los casos en los que esta se cumple y también las relaciones que guarda la fórmula con respecto a dichos casos particulares.

> Cuando no se sabe transferir la solución de un problema a otro problema similar, ocurre que el análisis de los términos del primer problema ha sido insuficiente, no se ha correlacionado lo dado, lo conocido en el problema con lo que en él se pide; no se ha visto cuáles son sus propiedades esenciales para incluirlo o compararlo con otro problema o fenómeno con propiedades comunes, es decir, no se ha generalizado su solución o se ha generalizado deficientemente. La generalización es la herramienta que permite la transferencia de la solución de un problema a otro que le es análogo (Rubinstein, 1963, p. 351).

A partir de esta idea, es deseable la habilidad del alumno para transferir el proceso de solución en una ecuación cuadrática como la siguiente $3x^2 - 5x + 2 = 0$, a la solución de la ecuación trigonométrica $3\text{sen}^2 x - 5\text{sen}x + 2 = 0$.

> Es importante que los estudiantes sepan analizar los casos particulares que van caracterizando una expresión matemática, y a partir de ese examen logren identificar la regularidad o el patrón que define a esa expresión. Es básico que ellos puedan ver poco a poco las generalizaciones de algunos conceptos matemáticos obtenidos mediante procesos de abstracción, y también es fundamental reconocer el carácter general de algunos enunciados matemáticos (López Rueda, 2009, p. 57).

Por ejemplo, se debe guiar al alumno para encontrar relaciones entre conceptos como trinomio al cuadrado y binomio al cuadrado.

$$(a + b + c)^2 = ((a + b)+ c)^2 = (a + b)^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$$

Otros casos son:

a) Se tiene un guarismo cuyas tres cifras son números enteros consecutivos en orden descendente, por ejemplo, 765. La suma de sus cifras es $7 + 6 + 5 = 18$; 18 es múltiplo de 3. De manera general, si cualquier número se escribe en forma polinómica $(x + 2)10^2 + (x + 1)10^1 + (x)10^0 = 100x + 200 + 10x + 10 + x = 111x + 210$ que es múltiplo de 3, es decir, $111x + 210 = 3(37x + 70)$.

b) Si se intercambian las cifras de centenas y unidades de un número cuyos tres dígitos son números consecutivos, se forma otro número, si al mayor se le resta el menor, el resultado es 198, por ejemplo $765 – 567 = 198$. El caso general es $(x + 2)10^2 + (x + 1)10^1 + x10^0 – [x10^2 + (x + 1)\,10^1 + (x + 2)\,10^0] = 100x + 200 + 10x + 10 + x – (100x + 10x + 10 + x + 2) = 200 – 2 = 198$.

Algunas recomendaciones para fomentar la generalización son:

- Proponer de manera graduada y sistemática problemas o actividades para que los estudiantes reconozcan regularidades o patrones en secuencias numéricas o gráficas.
- Proponer enunciados o preguntas para promover la reflexión en el estudiante y conjeturar sobre el paso de casos particulares a casos generales y viceversa.

Skemp (1980) apunta a la generalización matemática como producto de una actividad reflexiva, por ejemplo, en el proceso de aprender el uso de los exponentes, después de definir la notación mediante casos concretos, tales como $a^2 = (a)(a)$, $a^3 = (a)(a)(a)$, $a^4 = (a)(a)(a)(a)$, etcétera; es fácil ver $(a^2)(a^3) = (a)(a)(a)(a)(a) = a^5$, de estos casos y otros similares el alumno puede formar por intuición el esquema general y escribirlo directamente, $(a^5)(a^7) = a^{5+7}$, habiendo formado estos esquemas puede expresarlos en la forma $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$.

Otra situación de este proceso reflexivo lo menciona Flanders:

> la generalización puede aparecer en espacios donde los estudiantes proponen una fórmula a partir de uno o varios casos particulares. Por ejemplo, los alumnos de cálculo frecuentemente derivan la fórmula $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, observando algunas situaciones particulares como,
>
> $$\frac{d}{dx} x = 1$$
>
> $$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$
>
> $$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$
>
> $$\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3$$
>
> $\frac{d}{dx} x^5 = 5x^4$ (Flanders, 2014, p. 4).

CAPÍTULO 4

CONSIDERACIONES PRÁCTICAS ACERCA DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS

Como se mencionó anteriormente, por su misma naturaleza, es en el álgebra donde con mayor frecuencia el estudiante realiza sus primeras generalizaciones, porque el elemento de la generalidad hace necesario el uso de símbolos para denotar cualquier cantidad desconocida.

También en la solución de ecuaciones, que constituye la mayor parte de la actividad académica de los alumnos, se observa de manera implícita la reversibilidad de pensamiento al utilizar operaciones inversas para aislar o despejar una incógnita.

La flexibilidad de pensamiento y el pensamiento divergente prácticamente no se observan porque solamente se busca la "solución única", esto conlleva no buscar métodos alternativos en la solución de los problemas planteados.

Para observar dos métodos (rutinario y alternativo) se pueden plantear casos básicos como:[*]

- Si $a = 3$ y $b = 7$, encontrar el valor de $a^2 + b^2 + 2ab$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{3} + \mathbf{7})^2$.

[*] En cada caso el método alternativo se muestra en negritas.

- Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, encontrar el valor de (51)(51); **$(50 + 1)^2$**.
- Si $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$, encontrar el valor de (29)(11); **$(20 + 9)(20 – 9)$**.

El pensamiento divergente se puede explorar con las siguientes actividades:

- Representar el número 666 como suma de números naturales consecutivos. Encontrar todas las representaciones posibles (Applebaum *et al.,* 2011).
  Una solución es $1 + 2 + 3 + \cdots + 36$.
- Calcular el valor de la expresión $(2\frac{1}{4})(1.75)$ de tantas maneras como sea posible (Leikin y Lev, 2013).
  Una manera es $(2 + \frac{1}{4})(2 – \frac{1}{4})$
- Escribir tantas ecuaciones de manera que 2 sea al menos una de sus raíces (Sharma, 2013).

Leikin y Lev (2013) realizaron un estudio sobre creatividad matemática. A continuación, se muestra el problema de la mermelada y los procedimientos que exhibieron los estudiantes.

> Mali produce mermelada de fresa para varias tiendas de comida. Ella utiliza frascos para entregar la mermelada. Una vez distribuyó de mermelada por igual entre los frascos. Decidió ahorrar frascos y distribuir la mermelada de estos entre los demás frascos. Se dio cuenta de que había añadido exactamente de la cantidad anterior a cada uno de los frascos. ¿Cuántos frascos preparó al principio? (Leikin y Lev, 2013, p. 3).

Tabla 4.1. El problema de la mermelada y grupos de soluciones

Grupos de soluciones	Descripción
A	Sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy = 80 \\ 1.25x\,(y-4) = 80 \end{cases}$ Ecuación en dos variables $\frac{x}{y-4} = \frac{5x}{4y}$
B	Ecuación 1 $\frac{4}{x} = \frac{1}{4}$ Ecuación 2 $\frac{4}{x-4} = \frac{1}{4}$ Ecuación 3 $1.25x = x + 4$
C	Ecuación en dos variables $4x = \frac{1}{4}x\,(y-4)$
D	Diagrama
E	Comprensión: fracciones o porcentajes; $\frac{1}{4}$ de la cantidad inicial es $\frac{1}{5}$ de la nueva cantidad, 4 frascos equivalen a $\frac{1}{5}$ de todos los frascos, por lo tanto, había 20 frascos al principio.
F	Comprensión de solución: 4 tarros equivalen a $\frac{1}{4}$ de la cantidad restante de mermelada, por lo tanto, hay 20 frascos en total.
G	Comprensión de solución: la mermelada de cada uno de los 4 frascos se distribuyó entre 4 frascos, en general toda la mermelada de 4 frascos entró en 16 frascos. Así, hay 20 frascos en total.

Fuente: Leikin y Lev, 2013.

Las habilidades anteriores son deseables de fomentar en cualquier nivel educativo porque son la base para el desarrollo de otras habilidades más específicas para promover en el alumno la reflexión; el aprendizaje de las matemáticas va más allá de la memorización.

Algunas consideraciones teórico-prácticas en torno al desarrollo de habilidades matemáticas son las siguientes:

- Aun cuando en los objetivos educativos de los programas de estudio se hace mención al desarrollo de habilidades de pensamiento, los logros alcanzados son de niveles bajos. A este respecto, De la Peña, de manera similar, escribe: "cuando nosotros estuvimos en la escuela primaria, el énfasis de la enseñanza de las matemáticas sigue estando en las mecanizaciones" (1999, p. 17).

- En la enseñanza y aprendizaje de la matemática no basta con dominar los contenidos específicos que se enseñan, también es necesario tener conocimientos sobre aspectos didácticos de los temas y de los errores y dificultades en esta asignatura con el objetivo de desarrollar habilidades matemáticas.
- En el Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2016) para la educación secundaria se menciona la consolidación del modelo por competencias, implica el desarrollo de nuevas formas de trabajo en las aulas, debe ser apoyado con materiales educativos que permitan a los docentes contar con un amplio repertorio de estrategias para el trabajo con los alumnos.
- De acuerdo con la propuesta anterior, la idea básica de este trabajo es proporcionar ejemplos concretos (operativos) que permitan a los docentes tener nociones de cómo adaptar los problemas típicos a situaciones en las que se puedan manifestar las habilidades matemáticas.

Antes de plantear dichos ejemplos, se exponen las definiciones operativas de estas habilidades.

Definiciones operativas de las habilidades matemáticas

Ante la falta de un consenso que unifique las ideas sobre habilidades matemáticas, estas tienen varias interpretaciones, en consecuencia, el concepto de habilidad matemática en ocasiones se traslapa con los términos: capacidad, destreza, estrategia, ejecución y otros afines, para los cuales en muchas ocasiones tampoco existe una definición aceptada; por lo anterior, se hace necesario construir un concepto operativo como referente de estas ideas.

Bajo los argumentos anteriores enseguida se proponen las definiciones operativas de las habilidades matemáticas: flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento y generalización.

La flexibilidad de pensamiento

La flexibilidad de pensamiento se manifiesta en conductas como:

1. Capacidad para liberarse de argumentos y algoritmos matemáticos comunes.
2. Capacidad para dar varias interpretaciones a un dato numérico, algebraico o geométrico, en el contexto de las relaciones en una información numérica, algebraica o geométrica.
3. Capacidad para cambiar la estrategia de solución de un problema, cuando la que se utiliza resulta insuficiente.
4. Capacidad para encontrar varias soluciones a un problema (pensamiento divergente).
5. Capacidad para dar más de una solución a un problema usando métodos alternativos.

Problemas que promueven la flexibilidad de pensamiento

Star y Rittle-Johnson (2007) realizaron un estudio para observar el impacto del aprendizaje por descubrimiento y la promoción de la flexibilidad de pensamiento. Con esta metodología encontraron que los estudiantes exhiben dos tipos de procedimientos para resolver ecuaciones: una estrategia estándar y una estrategia más eficiente. A continuación, se muestran ambas estrategias en la solución de dos ecuaciones.

Tabla 4.2. Problemas que promueven el pensamiento flexible

Solución usando una estrategia estándar	Solución usando una estrategia más eficiente
$3(x + 1) = 15$ $3x + 3 = 15$ $3x = 12$ $x = 4$	$3(x + 1) = 15$ $x + 1 = 5$ $x = 4$
$3(x + 1) + 2(x + 1) = 20$ $3x + 3 + 2x + 2 = 20$ $5x + 5 = 20$ $5x = 15$ $x = 3$	$3(x + 1) + 2(x + 1) = 20$ $5(x + 1) = 20$ $x + 1 = 4$ $x = 3$

Fuente: Star y Rittle-Johnson, 2007, p. 4.

Para generar este tipo de estrategias, es necesario cambiar el objetivo de los problemas típicos. Como se mencionó anteriormente, se deben resignificar los conocimientos previos del alumno y conducirlos a razonar de manera inversa en el uso de los paréntesis, rompiendo con el procedimiento estandarizado de "eliminar los paréntesis". De esta manera, las estrategias más eficientes de los casos planteados por Star y Rittle-Johnson (2007), se muestran cuando los alumnos asocian ideas matemáticas (no eliminan los paréntesis), sino más bien conciben el uso de estos como una sola idea en la que aparece la "incógnita ampliada o reducida" por un número.

A continuación, se ejemplifica la solución de ecuaciones (que forman parte esencial de la actividad matemática del estudiante), usando tanto el método tradicional (típico o rutinario) como un método alternativo.

Ejemplo 1

Si $\frac{2}{3} + \frac{2}{x} = 1$ entonces $x = ?$

El procedimiento común es:

$$\frac{(2x + 6)}{3x} = 1$$

$$2x + 6 = 3x$$

$$2x - 3x = -6$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

El procedimiento alternativo consiste en guiar a los alumnos para que observen $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, por lo que si $\frac{1}{3} = \frac{2}{x}$, entonces $x = 6$

Ejemplo 2

Si $\dfrac{1}{2 - \frac{1}{x}} = 1$, entonces $x = ?$

El método tradicional es:

$$\frac{1}{\frac{2x - 1}{x}} = 1$$

$$\frac{x}{2x - 1} = 1$$

$$x = 2x - 1$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

El método no rutinario consiste en observar que si $2 - \frac{1}{x} = 1$, entonces se verifica la igualdad $\dfrac{1}{2 - \frac{1}{x}} = 1$, y esto ocurre para $x = 1$.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $4(x - 2) = 12$ y (cambio de objetivo) encontrar el valor de $(x - 2)$.

Método tradicional:

$$4(x - 2) = 12$$
$$4x - 8 = 12$$
$$4x = 12 + 8$$
$$4x = 20$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Sustituyendo en $(x - 2)$ se obtiene: $5 - 2 = 3$.

Procedimiento alternativo

Bajo este enfoque, resulta necesario guiar a los alumnos para que identifiquen el siguiente procedimiento:

$$4(x - 2) = 12$$
$$\frac{4(x - 2)}{4} = \frac{12}{4}$$
$$x - 2 = 3$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación $6(2x + 4) = 36$, encontrar el valor de $(x + 2)$.

Método rutinario

$$6(2x + 4) = 36$$
$$12x + 24 = 36$$
$$12x = 36 - 24$$
$$12x = 12$$
$$x = \frac{12}{12}$$
$$x = 1$$

Por consiguiente $x + 2 = 3$.

Orientando la actividad de los alumnos, estos abordarán la solución no rutinaria:

$$6(2x + 4) = 36$$

$$\frac{6(2x+4)}{6} = \frac{36}{6}$$
$$2x + 4 = 6$$
$$x + 2 = 3$$

Ejemplo 5

En la resolución del sistema formado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

en lugar de pedir resolver para x, y, se puede cambiar la estrategia a encontrar el valor de $3x + 3y$.

Procedimiento rutinario (método de sustitución)

$$x + y = 2$$
$$x = 2 - y;$$
$$3(2 - y) - 2y = 11$$
$$6 - 3y - 2y = 11$$
$$6 - 5y = 11$$
$$-5y = 11 - 6$$
$$y = -\frac{5}{5}$$
$$y = -1;$$
$$x = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

Por lo tanto $3(3) + 3(-1) = 9 - 3 = 6$

Método alternativo

Si se conduce a los alumnos observarán la ecuación $x + y = 2$, llegarán a la siguiente solución: $3(x + y) = 3(2)$ por lo tanto $3x + 3y = 6$.

Ejemplo 6

Análogamente se puede pedir encontrar el valor de (a + b) en el sistema formado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} 6a + 6b = -24 \\ 2a - 5b = 21 \end{cases}$$

Usando un método alternativo, los alumnos notarán

$$\frac{6a + 6b}{6} = \frac{-24}{6}$$
$$a + b = -4$$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 3 = \frac{7x}{2}$

Procedimiento común (usando la fórmula general):

$$x^2 - \frac{7x}{2} + 3 = 0$$
$$x^2 - 3.5x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-3.5) \pm \sqrt{(-3.5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{3.5 \pm \sqrt{12.25 - 12}}{2}$$
$$x = \frac{3.5 \pm \sqrt{0.25}}{2}$$

$$x = \frac{3.5 \pm 0.5}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Método alternativo

$$x^2 + 3 = \frac{7x}{2}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x} = \frac{\frac{7x}{2}}{x}$$

$$x + \frac{3}{x} = \frac{7}{2}$$

$$x + \frac{3}{x} = \frac{4}{2} + \frac{3}{2}$$

$$x + \frac{3}{x} = 2 + \frac{3}{2}$$

De la igualdad anterior se deduce $x = 2$. Con este procedimiento alternativo, solamente aparece una raíz o solución, pero se puede utilizar la propiedad: en toda ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$, "el producto de las raíces es igual al tercer término", o sea, $(x_1)(x_2) = c$.

Por lo tanto

$$(2)(x_2) = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$

Como en el caso anterior, resulta más laborioso transformar la ecuación a la forma, $x^2 + \frac{1}{x} = \frac{10x}{3}$, y después aplicar la fórmula cuadrática.

Con el método alternativo las soluciones son: $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

Ejemplo 9

Si $x^2 + y^2 = 8$, y $(x)(y) = 4$, encontrar el valor de $(x+y)^2$

Método común (sustitución y factorización)

$y = \frac{4}{x}$, sustituyendo en $x^2 + y^2 = 8$; $x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 8$.

$$x^2 + \frac{16}{x^2} = 8$$

$$x^4 + 16 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Por lo tanto $(x + y)^2 = (\pm 2 \pm 2)^2 = 16$.

Método alternativo

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 8 + 2(4) = 16$$

Ejemplo 10

Si $(m + 45)(m + 65) = 1\,600$, entonces $(m + 55)^2 = ?$

La solución estándar consiste en transformar la ecuación a la forma $m^2 + 110m + 1\,325 = 0$ y utilizar la fórmula cuadrática de manera que sus raíces son: –13.76894 y –96.23105; sustituyendo ambas soluciones en $(m + 55)^2$ se encuentra que $(m + 55)^2 = 1\,700$.

En la solución no rutinaria, $(m + 45)(m + 65)$ se expresa como una diferencia de cuadrados $(m + 45)(m + 65) = (m + 55 - 10)(m + 55 + 10) = (m + 55)^2 - (10)^2 = 1\ 600$, de aquí se sigue $(m + 55)^2 = 1600 + (10)^2 = 1\ 700$.

Ejemplo 11

Si $(n + 68)^2 = 654.481$, entonces $(n + 58)(n + 78) = ?$

El procedimiento rutinario es: $n + 68 = \sqrt{654.481} = \pm 25.58283$, por lo tanto los valores de n son: -42.41717 y -93.58283. Sustituyendo cada uno de estos valores en $(n + 58)(n + 78)$, la solución es 554.481.

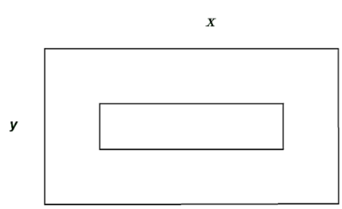
En el procedimiento no rutinario se tiene:

$(n + 58)(n + 78) = (n + 68 - 10)(n + 68 + 10) = (n + 68)^2 - (10)^2$
Sustituyendo el valor de $(n + 68)^2$: $654.481 - 100 = 554.481$.

Ejemplo 12

Se tiene una superficie rectangular con un área de 18 unidades cuadradas (u^2), sabiendo que en su interior existe otra superficie rectangular, de manera que la separación entre los márgenes horizontales es de 0.75 *u* y entre los márgenes verticales hay una separación de 0.5 *u*, encontrar las dimensiones de la superficie rectangular de manera que el área entre los rectángulos sea máxima.

Figura 4.1. Superficie rectangular con área de 18 unidades cuadradas



El procedimiento no rutinario consiste en utilizar el concepto de semejanza de figuras geométricas (como alternativa al uso del cálculo diferencial):

Como xy = 18, entonces $y = \frac{18}{x}$. Partiendo de la semejanza de los rectángulos se construye la proporción $\frac{x}{x - 1.5} = \frac{y}{y - 1}$, sustituyendo

$y = \frac{18}{x}$, la proporción se transforma en $\frac{x}{x - 1.5} = \frac{\frac{18}{x}}{\frac{18}{x} - 1}$, simplificando

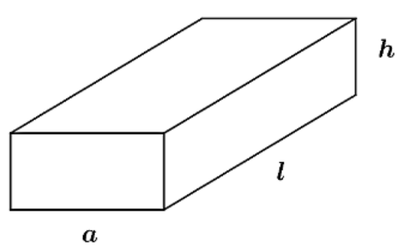
se obtiene $x^2 = 12$, por lo que $x = 2\sqrt{3}$ y $y = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Para que el área entre los rectángulos sea máxima, las dimensiones deben ser: $2\sqrt{3}\ u$ y $3\sqrt{3}\ u$.

Con $x = 2\sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$, el área de la superficie rectangular externa es $(2\sqrt{3})(3\sqrt{3}) = 18\ \text{u}^2$. El área de la superficie rectangular interna es $(2\sqrt{3} - 1.5)\ (3\sqrt{3} - 1) = 8.24\ \text{u}^2$. El área entre las superficies rectangulares es $18\ u^2 - 8.24\ u^2 = 9.76\ \text{u}^2$.

Ejemplo 13

En la siguiente representación de un cuerpo geométrico se conocen las áreas laterales: $ah = 24\ \text{cm}^2$, $hl = 32\ \text{cm}^2$ y $al = 48\ \text{cm}^2$.

Figura 4.2. Cuerpo geométrico



Encontrar los valores de la longitud (l), la altura (h) y el ancho (a).

Procedimiento común

$h = \frac{24}{a}, \frac{24}{a} l = 32, 24l = 32a, l = \frac{32a}{24} = \frac{4}{3} a$

$(a)\left(\frac{4a}{3}\right) = 48, 4a^2 = (48)(3), a = 6\ cm, h = 4\ cm$ y $l = 8\ cm$

Procedimiento no común

$$\frac{hl}{ah} = \frac{l}{a} = \frac{32}{24} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{al}{ah} = \frac{l}{h} = \frac{48}{24} = \frac{8}{4}$$

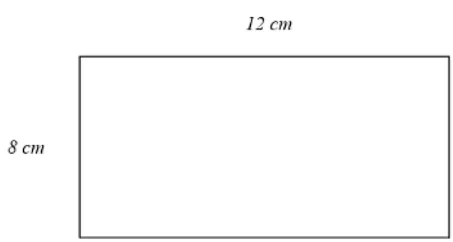
Por lo tanto $l = 8\ cm$, $a = 6\ cm$ y $h = 4\ cm$.

Los problemas siguientes están encaminados a promover la capacidad de los estudiantes para cambiar de un método rutinario a otro método no rutinario o alternativo en el mismo problema.

Problema 1

Dado el siguiente rectángulo (Siswono, 2010)

Figura 4.3. Rectángulo



a) Dibujar algunas figuras planas con área igual al rectángulo dado.

b) Construir dos problemas relacionados con rectángulos y encontrar las soluciones.

Problema 2

Dada la siguiente secuencia numérica

a) Representarla de otra manera.
b) Escribir la mayor cantidad de aseveraciones con respecto a los números colocados en sus diagonales, renglones y columnas.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Problema 3

El número 96 se puede expresar de cuatro maneras diferentes como $(p - q)(p + q) = 96$, con p y q números naturales. ¿Cuáles son?

Problema 4

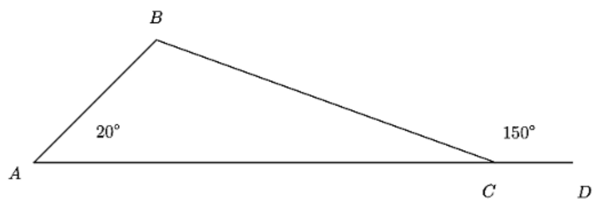
Se presentan dos ecuaciones $213x + 476 = 984$ y $213x + 476 + 4 = 984 + 4$, sin utilizar ningún procedimiento, ¿qué puede decir acerca de las soluciones? (Star y Rittle-Johnson, 2007).

c) Las dos tienen la misma solución.
d) Las dos tienen diferente solución.
e) No se puede decir si las dos ecuaciones tienen la misma o diferente solución.

Problema 5

Encontrar el valor del ángulo B, de dos maneras diferentes (Pepkin, s.f.).

Figura 4.4. Triángulo ABC



La reversibilidad de pensamiento

La reversibilidad de los procesos mentales se manifiesta en conductas como:

1. La capacidad para darse cuenta por sí mismo del carácter inverso de ciertos procesos de operación.
2. La capacidad de obtener algoritmos por sí mismo, conociendo el que se sigue en un proceso operativo que es el inverso del otro.
3. La capacidad para discriminar en dos problemas inversos con contextos semejantes las operaciones adecuadas para resolverlos

Problemas que exploran la reversibilidad de pensamiento

En seguida, a manera de ejemplo, se presentan problemas por parejas: un problema directo y uno inverso, de modo que en el problema inverso se desconocen uno o varios elementos o datos proporcionados en el problema directo.

1a) Un tanque de 80 litros de capacidad fue llenado a $\frac{2}{5}$ de su volumen. ¿Cuántos litros de agua fueron puestos en el tanque?
1b) 16 litros de agua fueron puestos en un tanque, si se llenó a $\frac{2}{5}$ partes de su volumen, ¿cuál es la capacidad del tanque?

2a) Una fábrica planea hacer 1 280 máquinas, al final se excede de lo planeado en 2.5%. ¿Con cuántas máquinas se excede?
2b) Una fábrica se excede en su producción en 2.5% produciendo 54 máquinas más de lo planeado. ¿Cuántas máquinas había planeado?

Ramful (2015) propone los siguientes problemas pareados:

3a) Un estacionamiento tiene capacidad para 45 coches. ¿Cuántos carros son $\frac{2}{3}$ de la capacidad?
3b) Hay 30 carros en un estacionamiento que equivalen a $\frac{2}{3}$ del total. ¿Cuántos coches caben en el estacionamiento?

4a) La persona A contribuye con \$32 a una fundación. La persona B contribuye con 175% de lo que contribuye A. ¿Cuánto es la contribución de B?
4b) La persona B contribuye con \$56 a una fundación. Esto representa 175% de la contribución de A. ¿Cuánto es la contribución de A?

5a) Evaluar la expresión $100 - \frac{57}{x}$ si $x = 3$

5b) Encontrar el valor de x en $100 - \frac{57}{x} = 81$

Dado que los procesos algebraicos son reversibles, es preferible presentarlos como el establecimiento de asociaciones bidireccionales del tipo $A \longleftrightarrow B$, que como asociaciones del tipo $A \longrightarrow B$ que funcionan solo en una dirección.

Los siguientes problemas permitirán a los alumnos caracterizar los procesos algebraicos como invertibles, aumentando sus posibilidades para desarrollar la reversibilidad de pensamiento.

Problema 1

Si $2x^2 + 9x - 35 = (2x - 5)(x + 7)$, entonces en $(a + 3)(4x + b) = 12x^2 + 27x + 15$ ¿cuál es el valor de a?, ¿cuál es el valor de b?

Problema 2

Si $(a + b + 4)(a + b - 4) = (a + b)^2 - (4)^2$, entonces ¿$(3)^2 - (m + n)^2 =$?

Problema 3

Si $(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1) = (2^2 - 1)(2^2 + 1) = 2^4 - 1$, entonces, encontrar dos números entre 60 y 70 que dividen exactamente al número $2^{24} - 1$.

Problema 4

Varios sistemas de ecuaciones tienen por solución $x = 2$ y $y = 3$.

Un sistema es:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 0 \\ 5y + 2x = 19 \end{cases}$$

Encuentre dos sistemas diferentes con la misma solución.

Problema 5

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$ son: $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. Las soluciones de otra ecuación cuadrática son: $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$ Encuentre esta ecuación.

Problema 6

¿Qué relación hay entre las soluciones de las ecuaciones $2x^2 + x - 6 = 0$ y $-6x^2 + x + 2 = 0$? Dar otro ejemplo.

Problema 7

Al efectuar la división del trinomio $2x^2 + 7x + 3$ entre uno de sus dos factores: $(x + 3)$ el residuo es cero; sabiendo que $(x - 3)$ es un factor de $2x^2 - 3x + m$, ¿cuál es el valor de m?

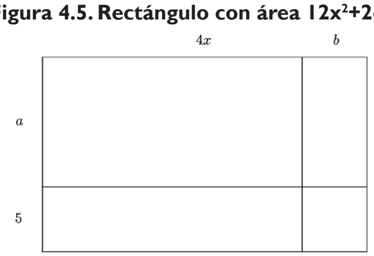
Problema 8

El lado de un cuadrado mide (x + y) y su área es $(x^2 + 2xy + y^2)$ Encontrar la expresión algebraica para la medida del lado de un cuadrado mayor cuya área es: $64x^2 + 128xy + 64y^2$.

Problema 9

En la figura se señalan las medidas de los lados del rectángulo que tiene por área $12x^2 + 26x + 10$ ¿Cuáles son los valores de a y b?

Figura 4.5. Rectángulo con área $12x^2$+26x+10



La generalización

La generalización se manifiesta en conductas como:

1. Reconocer patrones y semejanzas.
2. Relacionar subetapas en la solución de un problema con problemas ya vistos.
3. Inventar o usar símbolos para expresar ideas o fórmulas matemáticas.
4. Deducir una ley general a partir del análisis de casos particulares.

Problemas que fomentan el razonamiento inductivo

Como ejemplo, a continuación se presentan series o secuencias numéricas dirigidas a los alumnos para hacer conjeturas, analogías y promover el razonamiento inductivo.

Problema 1

Encuentre la regla para efectuar la suma:

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots - 999$$

Propuesta: complete la siguiente tabla hasta encontrar la regla.

Tabla 4.3. Serie numérica 1

Serie	Número de términos (n)	Suma
1	1	1
1 – 3	2	– 2
1 – 3 + 5	3	3

(continuación)

1 – 3 + 5 – 7	4	– 4
1 – 3 + 5 – 7 + 9	5	⋮
1 – 3 + 5 – 7 + 9 – 11	⋮	
⋮		

Fuente: elaboración propia.

Escriba la regla en símbolos.

Problema 2

Encuentre la regla para efectuar la suma:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 999$

Tabla 4.4. Serie numérica 2

Serie	Número de términos (n)	Suma
1	1	1
1 + 3	2	4
1 + 3 + 5	3	9
1 + 3 + 5 + 7	4	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	5	⋮
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	⋮	
⋮		

Fuente: elaboración propia.

Escriba la regla en símbolos.

Problema 3

Encuentre la regla para efectuar la suma:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \cdots + 1\ 000$

Tabla 4.5. Serie numérica 3

Serie	Número de términos (n)	Suma
2	1	2
2 + 4	2	6
2 + 4 + 6	3	12
2 + 4 + 6 + 8	4	20
2 + 4 + 6 + 8 + 10	5	⋮
⋮	⋮	

Fuente: elaboración propia.

Escriba la regla en símbolos.

Problema 4

Encuentre la regla para efectuar la suma

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 500$

Tabla 4.6 Serie numérica 4

Serie	Número de términos (n)	Suma
1	1	1
1 + 2	2	3
1 + 2 + 3	3	6
1 + 2 + 3 + 4	4	10
1 + 2 + 3 + 4 + 5	5	15
: :	: :	: :

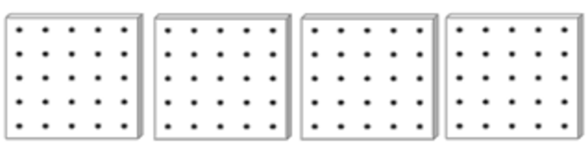
Fuente: elaboración propia.

Escriba la regla en símbolos.

Problema 5

Dibujar geoplanos (red cuadrada conformada por puntos) y construir varias figuras planas que contengan: un triángulo con solo 3 puntos en su interior en el primer geoplano, en el segundo geoplano un cuadrilátero con solo 4 puntos en su interior, en el tercer geoplano un pentágono con solo 5 puntos en su interior y en el cuarto geoplano un hexágono con solo 6 puntos en su interior.

Figura 4.6. Geoplanos



Observar las figuras construidas y completar la siguiente tabla:

Tabla 4.7. Serie 1 de figuras de *n* lados

Figuras	Puntos en los lados (e)	Puntos en su interior (i)	Área (en unidades cuadradas)
1		3	
2		4	
3		5	
4		6	
5		⋮	
6			
⋮			

Fuente: elaboración propia.

Escriba una expresión para determinar el área de un polígono (cóncavo o no cóncavo) contando el número de puntos en su interior (i) y el número de puntos (e) en los lados de la figura.

Problema 6

Considere figuras planas de 3, 4, 5 hasta n lados, como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 4.8. Serie 2 de figuras planas de 3, 4, 5, hasta *n* lados

Número de lados	Suma de los ángulos interiores	Número de diagonales trazadas desde un vértice cualesquiera
3	$180° = (3 - 2)(180°)$	0
4	$360° = (4 - 2)(180°)$	1
5	$540° = (5 - 2)(180°)$	2
6	⋮	⋮
⋮		

Fuente: elaboración propia.

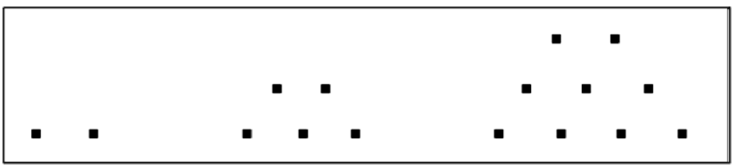
a) Escriba la fórmula para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono (no cóncavo) de n lados.
b) Escriba la fórmula para encontrar el número de diagonales trazadas desde cualquier vértice en un polígono (no cóncavo) de n lados.

Problema 7

Ávila *et al.* (2010, p. 37) plantean el siguiente caso.

Dada la representación:

Figura 4.7. Sucesión de puntos



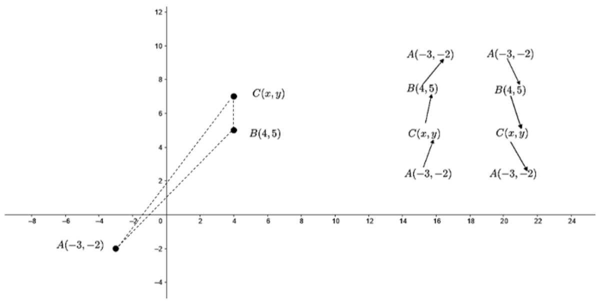
a) Continuar con la sucesión gráfica hasta el quinto elemento.
b) Expresar el número de puntos en cada figura de la sucesión.
c) ¿Qué número le corresponde a la figura?
d) ¿Qué número ocupa la posición n?

Problema 8

Hernández y Jiménez (2005) proponen el siguiente procedimiento para abordar la ecuación de la recta.

Considere un triángulo de coordenadas $A(-3, -2), B(4, 5), C(x, y)$, si pensamos que los tres puntos están alineados, el triángulo se transforma en una recta y su área es cero. Se colocan los puntos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (teniendo cuidado de repetir el primer punto).

Figura 4.8. Triángulo de coordenadas ABC



Se forma la suma de los productos de abajo hacia arriba (S_1). Después la suma de los productos de arriba hacia abajo (S_2). La ecuación de la recta se obtiene con el procedimiento $\frac{(S_1 - S_2)}{2} = 0$:

$$\frac{(-3)(y) + (x)(5) + (4)(-2) - [(-3)(5) + (4)(y) + (x)(-2)])}{2} = 0$$

Simplificando se llega a $y = x + 1$, ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3,-2)$ y $B(4,5)$.

Generalice este procedimiento para encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos desconocidos $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_1)$ y un punto desconocido $C(x, y)$.

Problema 9

Arslan y Yazgan (2015) proponen la siguiente secuencia de cuadrados.

Figura 4.9. Secuencia de cuadrados

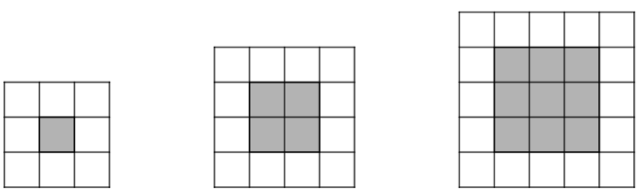


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Y piden a los estudiantes que contesten lo siguiente:

a) Dibujar la figura 4.
b) ¿Cuántos cuadrados sombreados pequeños hay en la figura 5?
c) ¿Cuántos cuadrados sin sombrear hay en la figura 5?

Siguiendo las preguntas planteadas por Arslan y Yazgan (2015), utilizar la siguiente tabla y encontrar las reglas generales para: conocer el número de cuadrados sombreados y el número de cuadrados sin sombrear.

Tabla 4.9. Serie de cuadrados

Figura	Total de cuadrados	Cuadrados sombreados	Cuadrados sin sombrear
1	$9 = 3^2$	1	$8 = 3^2 - 1$
2	$16 = 4^2$	$4 = 2^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
3	$25 = 5^2$	$9 = 3^2$	$16 = 5^2 - 3^2$
⋮	⋮	⋮	⋮

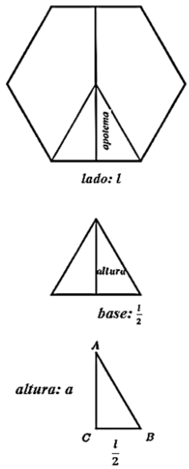
Fuente: elaboración propia.

Escriba las dos reglas generales.

Problema 10

La siguiente actividad propuesta por Jiménez (2003) permite encontrar una fórmula general para aproximarse a π, a partir de la construcción de polígonos regulares de *n* lados.

Figura 4.10. Descomposición de un hexágono para aproximarse a π



El triángulo ACB es rectángulo por lo tanto $\tan A = \dfrac{\frac{l}{2}}{a} = \dfrac{l}{2a}$, y $l = (\tan A)(2a)$.

Tabla 4.10. Serie de polígonos de *n* lados

Número de lados del polígono (*n*)	Ángulo A $\frac{180°}{n}$	Longitud del lado	Perímetro *nl*	Fórmula general
12	15°	(tan 15°)(2*a*)	6.430781*a*	3.21539
18	10°	(tan 10°)(2*a*)	6.347771*a*	3.173886
24				:
42	:			
50	: :	: :	: :	: :
56				
: :				

Fuente: Jiménez, 2003, p. 64.

Al aumentar el número de lados de un polígono regular, este se va pareciendo a una circunferencia; escriba la fórmula general para aproximarse a π.

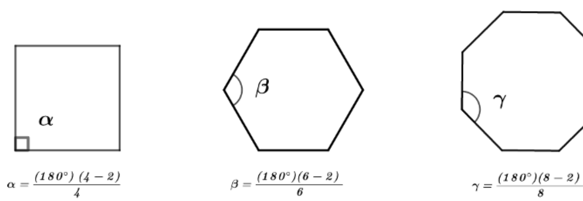
Problema 11

A propósito de π, los egipcios tomaban el área del círculo como el cuadrado de ocho novenos del diámetro $\left(\frac{8D}{9}\right)^2$. De acuerdo con la fórmula $A = \pi r^2$ para encontrar el área del círculo, ¿qué aproximación usaban los egipcios para π?

Problema 12

Ballen (2012) plantea el siguiente caso

Figura 4.11. Polígonos regulares



Fuente: Ballen, 2012, p. 36.

a) Cuente el número de lados de cada figura e identifique si son todos iguales o no.
b) ¿Los ángulos en cada figura son iguales?
c) ¿Hay alguna relación entre la medida de los ángulos y su número de lados?
d) ¿Podría hallar el ángulo interno de una figura de 3 y 5 lados iguales?
e) ¿Cuál podría ser la expresión para hallar el valor del ángulo interno de cualquier polígono regular?

Problema 13

Han sido invitadas a una fiesta 12 parejas. Las parejas solo se pueden sentar en series de pequeñas mesas cuadradas (Carson, 2007).

Figura 4.12. Pequeñas mesas cuadradas

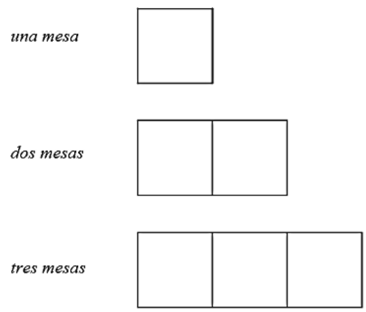


Tabla 4.11. Serie de mesas cuadradas e invitados

Número de mesas	Número de invitados
1	(2)(1) + 2 = 4
2	(2)(2) + 2 = 6
3	.
.	.
.	*n*

Fuente: elaboración propia.

¿Cuántas de estas pequeñas mesas se necesitan para sentar a las 24 personas?

¿Cuántas de estas pequeñas mesas se necesitan para sentar a *n* personas?

Los problemas 14 a 20 ayudan a generalizar propiedades de los números y propician la habilidad para acortar los procesos de razonamiento.

Problema 14

Encuentre la fórmula para mostrar que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es igual al doble del número menor más 1 (Dumitrascu, 2015).

Tabla 4.12. Serie de pares de números consecutivos

Números	Cuadrado del número menor	Cuadrado del número mayor	Diferencia entre los cuadrados
2, 1	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$4 - 1 = (2)(1) + 1 = 3$
3, 2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$9 - 4 = (2)(2) + 1 = 5$
4, 3	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$16 - 9 = (2)(3) + 1 = 7$
: :	: :	: :	: :

Fuente: elaboración propia.

Escriba la fórmula.

Los siguientes problemas fueron utilizados por Krutetskii (1976).

Problema 15

Pruebe que si el número mayor de dos números consecutivos se suma a su producto, entonces se obtiene el cuadrado del número mayor.

Problema 16

Pruebe que la suma de tres números consecutivos cualesquiera es divisible entre 3.

Problema 17

Pruebe que cualquiera de tres números consecutivos tienen la siguiente propiedad: el cuadrado del número de en medio es una unidad mayor que el producto de los otros dos números.

Problema 18

Piense y simbolice un número cualquiera, multiplíquelo por un número que sea 6 unidades mayor que el número pensado, al producto anterior súmele 9. Pruebe que el resultado obtenido siempre es un cuadrado.

Problema 19

Pruebe que los números de la forma abcabc como 269269, son divisibles entre 13.

Problema 20

La suma de dos fracciones es igual a 1. Pruebe que el cuadrado de la primera fracción sumado a la segunda fracción es igual al cuadrado de la segunda fracción sumado a la primera.

Relación entre las habilidades matemáticas

El docente debe plantear un concepto matemático y promover su enfoque de varias maneras, considerando que entre más representaciones posea un estudiante de un concepto tendrá mayores posibilidades de comprenderlo y lograr conexiones entre diferentes capacidades matemáticas.

Con respecto a las conexiones entre conceptos matemáticos, Krutetskii (1976) menciona que las habilidades matemáticas están relacionadas, formando una estructura y la presencia (o carencia) de alguna influye en la manifestación de las otras.

Para ejemplificar esta relación, pongamos por caso la ecuación $15x^2 + x - 6 = 0$.

a) Encontrar la ecuación cuyas raíces son $x = -\frac{2}{3}$ y $x = \frac{3}{5}$. El pensamiento flexible y la reversibilidad se muestran al expresar la ecuación en forma factorizada $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$.

b) La generalización se puede promover con el procedimiento de completar el trinomio cuadrado perfecto y formar una diferencia de cuadrados para encontrar los factores:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Con este procedimiento general, la factorización de la ecuación $15x^2 + x - 6 = 0$ es

$$\left(x + \frac{1}{(2)(15)} + \frac{\sqrt{1-4(15)(-6)}}{(2)(15)}\right)\left(x + \frac{1}{(2)(15)} - \frac{\sqrt{1-4(15)(-6)}}{(2)(15)}\right) =$$

$$\left(x + \frac{1}{30} + \frac{\sqrt{361}}{30}\right)\left(x + \frac{1}{30} - \frac{\sqrt{361}}{30}\right)$$

$$\left(x + \frac{1}{30} + \frac{19}{30}\right)\left(x + \frac{1}{30} - \frac{19}{30}\right) = \left(x + \frac{20}{30}\right)\left(x - \frac{18}{30}\right)$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$$

Este método podría describirse como directo y siempre conduce a la forma factorizada, incluso cuando las raíces son números complejos (Sangwin y Jones, 2016).

COMENTARIOS FINALES

Aun con las diferencias existentes en cuanto a la caracterización de las habilidades matemáticas, predomina el consenso acerca de la necesidad de desarrollarlas y valorarlas, puesto que aparecen frecuentemente de forma explícita en los objetivos y actividades educativas.

Una manera de conseguir acuerdos acerca de los tipos de habilidades cognoscitivas puede ser en términos de las actividades desarrolladas en el aula: actividades rutinarias y actividades no rutinarias o novedosas, en las que no basta con conocer los contenidos y procedimientos del tema, sino que es preciso hacer acopio de conocimientos, no necesariamente vistos en la temática tratada.

Otra forma de consensuar es retomar la posición de Krutetskii (1976) como referente histórico en los estudios sobre habilidades matemáticas.

También podemos decir: si las actividades realizadas son rutinarias, entonces se desarrollan habilidades básicas o destrezas de pensamiento; por otra parte, el desarrollo de actividades no rutinarias fomentará el logro de habilidades más complejas. Esto puede ser posible si se les enseña a los alumnos los métodos concretos para poner de manifiesto los rasgos esenciales de los objetos y fenómenos que se estudian.

Las habilidades matemáticas se pueden formar y desarrollar si presentamos a nuestros alumnos problemas que involucren conceptos no tratados directamente en clase con el propósito de observar el proceso de solución y juzgar las ideas que utilizan.

Independientemente de la solución, es importante analizar las estrategias que ponen en juego para resolver una situación planteada. Si se observan las herramientas conceptuales que usan se tendrán indicios de sus potencialidades.

Considerando la capacidad potencial de todos los alumnos, los docentes debemos reflexionar sobre el siguiente hecho: las habilidades matemáticas no son consecuencia de cualquier tipo de enseñanza, para su desarrollo es necesario plantear y estructurar actividades de aprendizaje apropiadas para fomentar la creatividad en los estudiantes. Como mencionan Nickerson *et al.*,

> la posibilidad de desarrollar las habilidades de pensamiento nos obliga a esforzarnos en involucrarlas en la enseñanza. Si lo intentamos, y descubrimos que eso no conduce a nada, el costo es sólo una minucia de esfuerzo dilapidado. Pero si se pueden enseñar, y optamos por no intentarlo, el costo, traducido a potencial intelectual desperdiciado, podría ser muy alto (Nickerson *et al.*, 1987, p. 83).

Estas y otras acciones implican replantear el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este replanteamiento puede conducir a los alumnos hacia una visión no convencional de las matemáticas, y, de acuerdo con Roy, si a un joven estudiante se le inicia en su futura carrera en el camino de la habilidad para generalizar un resultado, para interpretarlo de tantas formas como sea posible y para descubrir sus significados físicos inherentes, no odiará las matemáticas y tratará de ser más creativo de lo que sería si fuera otro el caso (Roy, 1982).

REFERENCIAS

Applebaum, M. *et al.* (2011). Prospective Teachers' Conceptions about Teaching Mathematically Talented Students: Comparative Examples from Canada and Israel. *The Mathematicas Enthusiast, 8* (1-2), 255-290.

Arslan, C. y Yazgan, Y. (2015). Common and Flexible use of Mathematical Non Routine Problem Solving Strategies. *American Journal of Educational Research, 3* (12), 1519-1523.

Avila, M. *et al.* (2010). La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de Licenciatura en Matemáticas. *CULCyT* (40-41), 34-40.

Balbuena, H. *et al.* (1994). Forma y medida. *Matemáticas. UPN* (5) *(Colección Cuadernos de Actualización).*

Balka, D. S. (1974). Ability Creative in Mathematics. *The Aritmetic Teacher, 21* (7), 633-636.

Ballen, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Recuperado de *www.bdigital.unal.edu.co/8063/1/javierorlandoballénnova*

Bazán, J. J. (2001). *Horizontes actuales de la educación media superior.* México: UNAM-CCH.

Callejo de la Vega, M. L. (2003). Creatividad y resolución de problemas. *Sigma* (22), 25-34.

Carson, J. (2007). A Problem with Problem Solving: Teaching Thinking without Teaching Knowledge. *The Mathematics Educator, 17* (2), 7-14.

Castro, C. *et al.* (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* México: GEI.

Chamberlin, S. A. (2010). Mathematical Problems that Optimize Learning for Academically Advanced Students in Grades K-/+6. *Journal of Advanced Academics, 22* (1), 52-76.

Cohen, M. P. (1987). Flexibility and Algebraic Problem Solving. *Mathematics Teacher, 80* (4), 294-295.

Cunningham, J. D. (1966). Rigidity in Children's Problem Solving. *Report Resumes. School Science and Mathematics, 66* (4).

Daugherty *et al.* (2015). Developing Concepts and Generalizations to Build Algebraic Thinking: The reversibility, Flexibility and Generalization Aproach. *Intervention in School and Clinic, 50* (5), 273-281.

Díaz, B. F. (2003). Las habilidades de pensamiento crítico y su enseñanza en contextos escolares. *Revista Educación 2001* (95).

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psichologyst, 23* (2), 167-180.

Dumitrascu, G. (2015). *Generalization: Developing Mathematical Practices in Elementary School. Dissertation For the Degree of Doctor of Philosophy.* Estados Unidos: The University of Arizona.

Espinosa, G. *et al.* (2012). Invención de problemas por estudiantes con talento. Enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación. XIV. Evento Internacional. Matecompu 2012. Matanzas, Cuba. Recuperado de *https://core.ac.uk/download/pdf/12342318.pdf*

Flanders, S. (2014). *Investigating Flexibility, Reversibility and Multiple Representations in a Calculus Enviroment.* Disertation. Doctor in Education. Pensilvania, Estados Unidos: University of Pittsburgh.

Flores, H. y Gómez, A. (2009). Aprender matemáticas, haciendo matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática, 21* (2), 117-142.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The Role of Beliefs an Attitudes in Learning Statistics: Towards an Assessment Framework. *Journal of Statistics Education, 2* (2).

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the Assessment and Encouragement of Mathematical Creativity in School Children. *Int. J. Marth. Educ. Sci. Technol., 16* (4), 547-553.

Haylock, D. W. (1987). A Framework for Assesing Mathematical Creativity in School Children. *Educational Studies in Mathematics, 18* (1), 59-74.

Haylock, D. W. (1997). Recognising Mathematical Creativity in School Children. *International Reviews on Mathematical Education, 29* (3), 68-74.

Hernández, J. D. y Jiménez, M. R. (2005). El geoplano, un recurso para abordar conceptos geométricos y algebraicos. *Entre Maestros, 5* (13), 14-19.

Hernández, J. D. (2006). Habilidades matemáticas en la comprensión de la Estadística y la Probabilidad en alumnos del CCH-Sur. Tesina de Especialización en Estadística Aplicada. México: IIMAS-UNAM.

Hernández, J. D. (2015). Razonamiento estadístico y habilidades matemáticas en alumnos del CCH. Tesis de Doctorado en Desarrollo. México: UPN.

Hernández, J. D. y Sánchez, A. P. (2016). Habilidades matemáticas y sentido estadístico. didáctica de las matemáticas. *Eutopía* (24). México: UNAM-CCH.

Itelson, B. (1985). Psicología de los tipos básicos de aprendizaje y enseñanza. En A. Petrovsky, *Psicología evolutiva y pedagógica.* México: Cartago-Letras.

Jiménez, M. R. (2003). Circunferencia entre diámetro. *Entre Maestros, 2* (7), 60-65.

Koedinger, K. R. y Nathan, M. J. (2004). The Real History Problems: Effects of Representations on Quantitative Reasoning. *The Journal of Learning Sciences, 13* (2), 129-164.

Krutetskii, V. A. (1973). The Problem on the Formation and Development of Abilities. *Soviet Education, XV* (5 y 6), 127-145.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* Illinois, Estados Unidos: University of Chicago Press.

Leikin, R. y Lev, M. (s.f.). *The Conection Between Mathematical Creativity and High Ability in Mathematics.* University of Haifa. Recuperado de *http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG7WG7_Lev.pdf*

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Relationship Between High Mathematical Ability and Mathematical Creativity in Secondary School Children. *Research Report. Faculty of Education. Department of Mathematics Education.* Israel: University of Haifa.

López Rueda, G. (2009). *Habilidades matemáticas. Matemáticas y educación básica 3.* México: Ángeles Editores

Lupiañez, J. G. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital Matemáticas, Educación e Internet, 14* (2).

Martínez, V. (2013). *Problemas inversos: los casi olvidados de la matemática educativa.* Memoria del Congreso Internacional en Ciencias de la Educación. México: Universidad de Colima.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA, 4* (3), 232-247.

Menschinskaia, N. A. (1960). *El pensamiento. Redacción de S. L. Rubinstein y otros. Psicología.* México: Grijalvo *(Tratados y manuales).*

Mora, H. M. (2012). *La reversibilidad de pensamiento para fortalecer la competencia matemática a través de la resolución de problemas algebraicos mediante el acompañamiento con estudiantes de secundaria.* Tesis de Maestría. México: UPN.

Nickerson, R. *et al.* (1987). *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual.* Barcelona, España: Paidós *(Temas de educación).*

Orton, A. (1998). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teorías y prácticas en el aula.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Peña, J. A. de la (1999). La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas. *Revista de la Universidad de México*, 12-18.

Pepkin, K. (s.f.). *Creative Problem Solving.* Recuperado de *http://www.uh.edu/honors/Program-Minors/honors-and-the-schools/houston-teachers-institute/curriculum-units/pdf/2000*

Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Prouse, H. L. (1967). Creativity in School Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 876-879.

Ramful, A. (2015). Reversible Reasoning and the Working Backwards Problem Solving Strategy. *Australian Mathematics Teacher, 71* (4), 28-32.

Roy, S. (1982). La creatividad matemática, ¿puede enseñarse a edad temprana? *International Journal of Math. Educ. Sci. Technol., 13* (2).

Rubinstein, S. L. (1963). *El ser y la conciencia* y *El pensamiento y los caminos de su investigación.* México: Grijalvo.

Ruesga *et al.* (s.f.). *Matemática relacional y procesos directo e inverso.* Recuperado de *soarem.org.ar/Documentos/23Ruesga.pdf*

Rugarcia, A. y Delgado, A. (1987). Resolución creativa de problemas en la enseñanza de las ingenierías. *Revista de la Educación Superior* (62).

Sánchez, A. (2013). Las matemáticas están en todas partes. *Revista Ciencia, 64* (1), 26-33.

Sangwin, C. J. y Jones, I. (2016). Asymmetry in Student Achievement on Multiple-Choice and Constructed-Response Items in Reversible Mathematics Processes. *Educ. Stud. Math.* (2017) 94, 205-222.

Schoenfeld, A. (2012). Cómo pensamos: la matemática que tiene sentido. *Gaceta CCH (1304).*

Schoenfeld, A. (s.f.). *Evaluaciones sumativa y formativa en matemática. Apoyo a las metas de los estándares de núcleo curricular común (Common Core Standars).* Recuperado de *https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2013/11/ahschoelfeld-math-assessments-tip-es.pdf*

SEP (1990). Planes de estudio de educación básica. Primer grado: decundaria. *Revista Informativa del Profesor de Matemáticas. Edición Especial.* ANPM.

SEP (2016). Nuevo Modelo Educativo. México: SEP.

Shardakov, M. N. (1963). *El desarrollo del pensamiento en el escolar.* México: Grijalvo *(Colección pedagógica).*

Sharma, Y. (2013). Mathematical Giftedness. A Creative Scenario. *Australian Mathematics Teacher, 69* (1), 15-24.

Siswono, T. E. (2010). Leveling Students' Creative Thinking Solving and Posing Mathematical Problem. *Indo MS. J. M. E., 1* (1).

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2007). *Flexibility in Problem Solving: The Case of Equation Solving. Learning and Instruction.*

Stavy, R. y Rager, T. (1990). *Inverse Relations: The Case of Quantity of Matter.* Fourteenth PME Conference. Vol. 3. México.

Syarifatul, M. *et al.* (2017). The Aspects of Reversible Thinking in Solving Algebraic Problems by an Elementary Student Winning National Olympiad Medals in Science. *World Transactions on Engineering and Technology Education, 15* (2), 189-194.

Terán, R. (2010). Aportes y elementos críticos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). *Revista Educación 2001* (177), 17-22.

Villa , O. J. (2006). El proceso de generalización matemática. algunas reflexiones en torno a su validación. *Revista Tecno Lógicas* (16).

Zorrilla, M. (2004). La educación secundaria en México: al filo de su reforma. REICE-*Revista Electrónica Iberoamerica sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 2* (1), 1-22.

Mildred Abigail López Palacios *Subdirectora de Fomento Editorial*
Armando Ruiz Contreras *Edición y corrección de estilo*
Angélica Fabiola Franco González *Formación*
Jésica Gabriela Coronado Zarco *Diseño de portada*

Esta primera edición de *Habilidades matemáticas en el nivel medio* estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria de la Universidad Pedagógica Nacional y se publicó en noviembre de 2021.